



Transformations opératoriels de problèmes dynamiques et applications

Emmanuel Montseny

► To cite this version:

Emmanuel Montseny. Transformations opératoriels de problèmes dynamiques et applications. Automatique. INSA Toulouse, 2009. Français. NNT: . tel-01138477

HAL Id: tel-01138477

<https://theses.hal.science/tel-01138477>

Submitted on 2 Apr 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par *l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse*

Discipline ou spécialité : *Systèmes Automatiques*

Présentée et soutenue par

EMMANUEL MONTSENY

le 10 décembre 2009

Transformations opératoriels de problèmes dynamiques et applications

JURY

Germain Garcia (Président)
Jean-Jacques Loiseau (Rapporteur)
Joseph Winkin (Rapporteur)
Henri Camon (Examineur)
Alban Quadrat (Examineur)
Andrei Doncescu (Directeur)

Ecole doctorale : *Systèmes (EDSYS)*

Unité de recherche : *LAAS - CNRS*

Remerciements

C'est avec une certaine appréhension que j'aborde cette page de remerciements : celle-ci doit être complète sans sombrer dans l'exhaustivité, équitable sans pour autant niveler les contributions, personnelle tout en respectant certains us et coutumes ; je prends donc mes précautions dès maintenant en annonçant que celle-ci sera probablement ratée.

Mes premiers remerciements vont naturellement à Andreï Doncescu, pour la totale liberté qu'il m'aura donnée durant cette thèse et pour la confiance inébranlable qu'il a placée en moi ; le résultat final s'en ressent, à n'en pas douter.

Mes remerciements vont ensuite à Jean-Jacques Loiseau et Joseph Winkin, pour m'avoir fait l'honneur de rapporter cette thèse ; j'ai tiré grand profit des nombreuses remarques et recommandations dont ils m'ont fait part. Je remercie également Henri Camon, Germain Garcia et Alban Quadrat pour avoir accepté de faire partie de mon jury. Je tiens tout particulièrement à remercier ce jury dans son ensemble, pour avoir fait de la soutenance de thèse un moment inoubliable : ce fut un échange scientifique authentique d'une intensité à laquelle je ne m'attendais pas.

Je ne saurais trop exprimer ma gratitude envers Germain Garcia, pour avoir toujours été présent dans les moments difficiles et m'avoir fait part de ses conseils avisés.

Important fût le rôle des amis tels que Marco, Jean-Yves, Hélène et Jérémy, les Mauchains Davuth et Vincent, le Mal, Rémi, qui me traînèrent hors de chez moi de temps à autre pour me changer les idées, me proposant qui un resto, qui une soirée jeux de cartes, qui une soirée nanar, etc. Non moins important le rôle des fidèles amis à distance, Chapon, Bebert, Rhad, avec lesquels c'est toujours un véritable plaisir de discuter. J'adresse une pensée émue à MJ.

Cette page de remerciements ne serait pas digne de ce nom si n'y figurait l'incontournable allusion à tous celles et ceux que l'on ne peut citer, mais qui ne déméritent pas pour autant ; dès lors que vous vous demandez si cela vous concerne, la réponse est affirmative.

Enfin, il est certaines personnes dont il semble absurde de cibler les contributions tant on a l'impression de tout leur devoir : mon père bien sûr, pour m'avoir communiqué dès mon plus jeune âge ce gout profond pour la science ; ma mère, pour m'avoir transmis presque tout le reste ; mon frère enfin, pour m'avoir fait découvrir Liszt et Chopin. Les brouilles restantes seront mises sur le compte de mon mérite personnel.

Mes derniers remerciements vont sans surprise à Céline, pour m'avoir supporté - au sens propre comme au figuré - durant toutes ces années, ce qui, me suis-je laissé dire, est une véritable prouesse.

Table des matières

Introduction	1
I Principes Théoriques	5
1 Opérateurs, problèmes dynamiques et transformations	7
1.1 Notions générales sur les opérateurs	7
1.1.1 Opérateurs statiques	9
1.1.2 Opérateurs linéaires dynamiques	9
1.1.3 Opérateurs ponctuels	11
1.1.4 Réalisations locales d'opérateurs	12
1.1.5 Remarques sur la complexité numérique d'opérateurs	14
1.2 Formulation abstraite et transformation de systèmes et problèmes dynamiques . . .	15
1.2.1 Formulation trajectorielle des modèles dynamiques	15
1.2.2 Problèmes dynamiques	18
1.2.3 Quelques exemples	18
1.2.4 Transformation de problèmes dynamiques	21
2 Transformations et opérateurs statiques	23
2.1 Continuité des opérateurs statiques	23
2.2 Différentiabilité des opérateurs statiques	26
2.3 Application : linéarisation d'un système dynamique explicite	28
3 Transformation par représentation diffusive	33
3.1 Principe général	33
3.2 Terminologie	36
3.3 Espaces vectoriels topologiques adaptés à la représentation diffusive	36
3.4 Extension vectorielle	37
3.4.1 Représentation diffusive d'une fonction u à valeurs vectorielles	37
3.4.2 Symbole diffusif d'un opérateur agissant sur des fonctions à valeurs vectorielles	37
3.5 Transformations diffuses de modèles non locaux	39
4 Transformations de type changement de temps	41
4.1 Changements de temps généraux	41
4.1.1 Définition et propriétés	41
4.1.2 Inversion d'une opération de changement de temps	43
4.1.3 Changements de temps et dérivation	44
4.2 Changements de temps dynamiques	46

4.2.1	Définition	46
4.2.2	Exemple fondamental : $\mathbf{S}_{\partial_t^{-1}}$	46
4.3	Transformation de modèles par changement de temps	48
4.3.1	Transformation de modèles locaux	48
4.3.2	Transformation de modèles non locaux explicites	49
4.3.3	Suppression de singularités de modèles	51
4.3.4	Découplage des composantes état/entrée pour un système à variables séparées	52
4.4	Changements de temps multiples	53
5	Paramétrisation opératorielle de modèles dynamiques	59
5.1	Paramétrisation	60
5.1.1	Paramétrage	60
5.1.2	Opérateurs de sortie paramétrique	62
5.1.3	Propriétés	64
5.1.4	Exemples de paramétrages de modèles dynamiques	64
5.2	Équation paramétrique	70
5.3	Paramétrisation partielle	73
II	Applications	77
6	Analyse d'un modèle singulier de front de flamme sphérique	79
6.1	Modèle considéré	79
6.2	Transformation du modèle par changement de temps et analyse	80
6.2.1	Changement de temps	80
6.2.2	Analyse du modèle transformé	81
6.2.3	Changements de fréquences	83
6.3	Résultats numériques	84
6.4	Paramétrisation	85
7	Construction de schémas numériques pour une classe d'équations de propagation non locales	87
7.1	Modèles considérés et leur transformation par représentation diffusive	88
7.2	Construction d'une classe de schémas numériques	89
7.2.1	Discrétisation en ξ	89
7.2.2	Discrétisation en x	90
7.2.3	Stabilité d'une classe de schémas explicites	90
7.3	Application à un modèle de paroi poreuse	92
7.3.1	Modèle considéré	92
7.3.2	Schéma numérique	93
7.3.3	Interprétation physique des conditions de stabilité	93
7.3.4	Résultats numériques	94
7.3.5	Comparaison entre les conditions de stabilité théoriques et expérimentales	96
8	Paramétrisation et contrôle d'un modèle de bioréacteur	99
8.1	Modèle de bioréacteur fed-batch	100
8.2	Paramétrisation du modèle	101
8.2.1	Transformation par changement de temps dynamique	101
8.2.2	Équation paramétrique associée au modèle	101

8.2.3	Illustration du paramétrage du modèle	103
8.3	Asservissement du modèle paramétré	104
8.3.1	Asservissement de la biomasse	104
8.3.2	Asservissement du substrat et du produit	107
8.3.3	Robustesse aux bruits de mesure	108
8.3.4	Compensation de perturbation	110
8.3.5	Bruit et recalage de modèle à intervalles réguliers	113
8.4	Suivi de trajectoire pour le modèle paramétré	114
8.4.1	Construction du correcteur et résultats	114
8.4.2	Contrôleur passif par recalage de modèle	115
8.5	Extension du paramétrage à une classe de modèles plus large	116
Conclusion		119
Annexes		120
A Notions sur les espaces de trajectoires		121
B Schéma numérique pour $(\partial_t - a)^{-1}$		127
Bibliographie		128

Introduction

De manière générale, l'automatique est une science consistant à résoudre des problèmes définis sur des modèles dynamiques, c'est-à-dire des modèles d'évolution. Pendant longtemps, les moyens de calculs limités ont empêché l'essor d'opérations complexes et favorisé les analyses essentiellement centrées sur les notions d'espace d'état et de systèmes différentiels. Pour les systèmes linéaires, la transformation de Laplace est un outil de base, permettant de transformer une équation différentielle à coefficients constants en équation algébrique résoluble avec relativement peu de calculs. Pour les systèmes non linéaires, de nombreuses approches ont permis et permettent de résoudre divers problèmes de manière satisfaisante et peu coûteuse.

Cependant, nombreux sont les problèmes nécessitant d'être posés de manière globale, c'est-à-dire dans des *espaces de trajectoires* (ce dernier terme désignant des fonctions du temps considérées globalement). Tel est le cas, par exemple, des modèles intégréo-différentiels (qui sont "non locaux en temps"), qui imposent, de par leur formulation même, une analyse et une résolution "trajectorielles", au moyen d'*opérateurs*, c'est-à-dire de fonctions définies sur des espaces de trajectoires, là où les modèles différentiels n'exigent que des fonctions au sens ordinaire.

A condition de restreindre les opérations mises en œuvre à des classes "raisonnables", les moyens de calcul actuels permettent d'envisager le traitement de nombreux problèmes en travaillant globalement sur les trajectoires d'évolution. En particulier, excepté dans certains cas particuliers dont la complexité reste encore pénalisante, on peut considérer que les opérateurs correspondant à l'intégration de modèles différentiels linéaires sont relativement peu coûteux, tant au niveau théorique que numérique. Et, de même que les transformations "locales" permettent dans nombre de cas de reformuler un problème sous une forme mieux adaptée à l'analyse ou à la résolution numérique, des "transformations opératorielles", plus riches car définies par des opérateurs agissant sur des espaces de trajectoires (et dont les transformations locales font partie), sont susceptibles d'apporter des simplifications plus significatives encore, sous réserve que l'on puisse mettre en œuvre les solutions auxquelles elles conduisent.

Dans cette optique, et du fait que les espaces de trajectoires sont en général de dimension infinie, la notion d'*opérateur sur des trajectoire* implique l'utilisation d'outils mathématiques adaptés : analyse fonctionnelle, topologie, etc., notamment afin de garantir la *continuité* des transformations considérées. La continuité est en effet généralement obtenue par un choix convenable des espaces de trajectoires (et donc de leurs topologies) entre lesquels sont définies ces transformations opératorielles, ces topologies permettant par ailleurs de construire des schémas d'approximation numérique et de mesurer les erreurs commises lors de mises en œuvre numériques. Il s'agit là d'une richesse propre à la description trajectorielle des problèmes dynamiques, que n'offrent pas les espaces d'état de dimension finie de type \mathbb{R}^n classiquement utilisés, pour lesquels toutes les métriques (compatibles avec la physique) sont équivalentes.

L'objet de cette thèse est d'une part de formaliser et étudier la problématique de *transformation opératorielle* pour des *problèmes dynamiques* généraux, avec pour objectif d'apporter des *simpli-*

fications ou *améliorations* significatives à l'analyse, la simulation, l'identification, la commande, l'estimation, etc. ; d'autre part de mettre l'intérêt de cette approche "trajectorielle" des problèmes dynamiques en lumière à travers quelques exemples non triviaux, traités par voie analytique et mis en œuvre numériquement.

Cette thèse est organisée comme suit.

Dans le chapitre 1, on introduit un cadre abstrait pour la formulation des systèmes et problèmes dynamiques sous forme trajectorielle, afin de pouvoir considérer de manière systématique et générique leur transformation en vue de les simplifier. Des notions préliminaires sur les opérateurs, outils centraux de ces transformations, sont introduits en début de chapitre : on énumère en particulier différentes classes d'opérateurs intéressants du point de vue de leur utilité et de leur faible complexité.

Dans le chapitre 2, on étudie la classe des opérateurs *statiques*, incontournables de par leur omniprésence tant dans la formulation des systèmes et problèmes dynamiques que dans les transformations que l'on sera amené à effectuer. La continuité des transformations étant une propriété indispensable pour des raisons de praticabilité des outils, on étudie la continuité de ces opérateurs pour certaines topologies classiques d'espaces de trajectoires, dont les topologies variées permettent d'obtenir des résultats physiquement peu restrictifs. La dérivabilité des opérateurs statiques est également rapidement étudiée, et un principe de linéarisation trajectorielle des systèmes dynamiques généraux autour de trajectoires de référence est présenté.

Dans le chapitre 3, on introduit brièvement la *représentation diffusive* [35], qui permet de réaliser une vaste classe d'opérateurs linéaires dynamiques $H(t, \partial_t)$ au moyen de réalisations *locales* diffusives, présentant des propriétés intéressantes tant du point de vue de leur analyse que de leur simulation numérique. Les opérateurs non locaux étant naturels dans une approche opératorielle, les transformations de modèles par représentation diffusive constituent un outil central, permettant de considérer, dans une large part, que la plupart des opérateurs linéaires intégraux sont résolus et peuvent être manipulés sans contrainte.

Dans le chapitre 4, on introduit et étudie les transformations de modèles par *changement de temps*, permettant d'exprimer un modèle dynamique dans une horloge propre au système, différente du temps physique t . On introduit en particulier les changements de temps dynamiques, dont l'horloge est obtenue par transformation opératorielle de fonctions, incluant éventuellement - et c'est souvent le cas en pratique - tout ou partie des inconnues du problème dynamique. De nombreuses propriétés sont établies concernant les transformations de modèles locaux par ces opérateurs et, par le biais de la représentation diffusive, celles-ci sont étendues à une vaste classe de modèles non locaux.

Dans le chapitre 5, on aborde la notion de *paramétrisation opératorielle* de modèle dynamique. Celle-ci consiste à exprimer tout ou partie des couples (u, x) solution d'un modèle dynamique abstraitement définis par $\Phi(u, x) = 0$, à partir d'une quantité (en général trajectorielle) y , de telle manière qu'il n'est plus nécessaire de résoudre l'équation $\Phi = 0$ pour résoudre le problème dynamique, le "paramètre" y résumant cette contrainte. Différentes approches de la littérature relèvent de cette problématique, telle la linéarisation par retour d'état [24], ou encore la platitude [16]. L'originalité de l'approche proposée ici tient au cadre trajectoriel dans lequel toute la problématique est posée, celle-ci permettant de s'affranchir des contraintes imposées par les méthodes exclusivement basées sur une formulation locale dans l'espace d'état, mais également d'autoriser *a priori* l'utilisation de tout opérateur local ou non local (sous réserve que celui-ci soit de complexité compatible avec les moyens de calculs disponibles). Le cadre général dans lequel on se place permet en outre d'affaiblir la notion de paramétrisation, en n'imposant pas le caractère résolu de la relation

$y \mapsto (u, x)$ (équations paramétriques), ou en considérant la paramétrisation d'un sous-modèle du modèle global (paramétrisation partielle).

Les chapitres suivants constituent la seconde partie de la thèse et relèvent d'applications des notions précédemment introduites.

Dans le chapitre 6, on étudie un modèle de front de flamme sphérique proposé par Joulin [25], qui est non local, implicite et singulier. Après transformation diffusive et transformation de changement de temps, on obtient un modèle "désingularisé", local en temps, pour lequel l'analyse est considérablement simplifiée, permettant notamment d'établir simplement la dissipativité et l'unicité locale de solutions du modèle, ainsi que des simulations numériques simples et précises.

Dans le chapitre 7, on présente les principaux résultats de travaux publiés dans [11, 10, 12]. On établit et analyse des schémas numériques pour une classe d'équations de propagation intégrodifférentielles. Le problème de simulation de tels modèles au moyen de schémas classiques est souvent difficile. Après transformation du modèle par représentation diffusive, on peut au contraire utiliser les outils classiques des équations locales pour analyser la dissipativité du système continu et, par suite, construire des schémas numériques stables. Dans la deuxième partie du chapitre, on applique ces résultats sur un modèle non local de paroi-poreuse, sur lequel on effectue en particulier une analyse physique de la condition de stabilité, retrouvant ainsi l'extension d'une condition classique pour les schémas de propagation.

Pour finir, on présente dans le chapitre 8 une application consistante de transformation par changement de temps et paramétrisation, portant sur un modèle non-linéaire de bioréacteur fed-batch. Ce dernier est paramétré au moyen d'une équation paramétrique explicite sur laquelle des problèmes de contrôle sont aisément résolus. On y établit en particulier des correcteurs pour l'asservissement et le suivi de trajectoire pour chacune des variables du système de manière générique. On développe ensuite une méthode de compensation de perturbation par modification de paramétrage et/ou modification de modèle, permettant de rétablir la pertinence du paramétrage après perturbation et d'envisager un suivi de trajectoire passif peu sensible au bruit de mesure.

Première partie

Principes Théoriques

Chapitre 1

Opérateurs, problèmes dynamiques et transformations

Sommaire

1.1	Notions générales sur les opérateurs	7
1.1.1	Opérateurs statiques	9
1.1.2	Opérateurs linéaires dynamiques	9
1.1.3	Opérateurs ponctuels	11
1.1.4	Réalisations locales d'opérateurs	12
1.1.5	Remarques sur la complexité numérique d'opérateurs	14
1.2	Formulation abstraite et transformation de systèmes et problèmes dy-	
	namiques	15
1.2.1	Formulation trajectorielle des modèles dynamiques	15
1.2.2	Problèmes dynamiques	18
1.2.3	Quelques exemples	18
1.2.4	Transformation de problèmes dynamiques	21

Le but de cette section est d'introduire, dans un cadre général, les notions nécessaires pour aborder de façon systématique la problématique de transformation, en vue de leur simplification, des problèmes et systèmes dynamiques, ces derniers étant considérés globalement, c'est-à-dire du point de vue des *trajectoires*, par opposition aux transformations dans l'espace d'état (autrement dit pour tout instant t fixé). Ces transformations étant par nature opératoriels, une partie importante de cette section concerne les opérateurs, objets mathématiques a priori complexes du fait qu'il s'agit de "fonctions définies sur des espaces de fonctions". L'intérêt essentiel d'un cadre abstrait aussi général est de permettre des formulations simples et unifiées.

1.1 Notions générales sur les opérateurs

On introduit dans cette section diverses notions fondamentales concernant les opérateurs susceptibles d'être utilisées dans la suite. En particulier, quelques classes remarquables d'opérateurs, de natures très différentes, sont sommairement décrites. Certaines de ces classes seront étudiées plus en détails dans les chapitres suivants. Le choix de la classification retenue est justifié d'une part par la simplicité relative des opérateurs ainsi définis, en particulier du point de vue de la

mise en œuvre numérique, d'autre part par l'efficacité de ces opérateurs pour la transformation de problèmes dynamiques, ceci étant illustré dans la seconde partie de cette thèse.

D'autres types d'opérateurs utiles dans le cadre de la problématique étudiée dans cette thèse ne sont pas introduits dans cette section, soit parce que leur définition est bien connue, notamment les opérateurs de "changement de variables", dont le cas particulier des "changements de temps" fait l'objet d'une section spécifique ; soit parce qu'il n'ont pas été explicitement utilisés dans ce travail, comme par exemple les *opérateurs d'hystérésis*, dont on trouvera un exposé complet dans [46].

De façon générale, on appellera *opérateur* toute fonction \mathcal{H} définie sur un espace vectoriel topologique, la plupart du temps un espace fonctionnel ; le domaine de définition de \mathcal{H} est noté $\text{dom}(\mathcal{H})$. On appellera *trajectoire* toute distribution (en particulier toute fonction mesurable) x définie sur un intervalle temporel I , la plupart du temps $[0, T]$, et à valeur dans un espace vectoriel topologique, en général de Banach. Le support de x , c'est-à-dire le complémentaire du plus grand ouvert de I sur lequel x est identiquement nulle, est noté $\text{supp } x$. Enfin, l'opérateur de dérivation par rapport au temps t , essentiel dans le cadre des systèmes dynamiques, sera noté ∂_t .

Dans la suite, \mathbf{X} et \mathbf{Y} désignent des espaces des Banach, et \mathfrak{X} et \mathfrak{Y} sont des espaces de Banach de *trajectoires* définies sur \mathbb{R}_t , à valeurs respectivement dans \mathbf{X} et \mathbf{Y} (par exemple $\mathfrak{X} = C^\infty(\mathbb{R}_t; \mathbf{X})$, $\mathfrak{Y} = L^\infty(\mathbb{R}_t; \mathbf{Y})$). NB : les notions essentielles relatives aux espaces de trajectoires sont rappelées en annexe.

Définition 1.1 *Un opérateur $\mathcal{H} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ est dit ***t*-invariant** (ou invariant lorsqu'aucune confusion n'est à craindre) lorsqu'il est invariant par translation, c'est-à-dire : $\forall \tau \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathfrak{X}, \forall t \in \mathbb{R}$,*

$$(\mathcal{H}(u))(t - \tau) = (\mathcal{H}(u(\cdot - \tau)))(t).$$

L'addition et la composition d'opérateurs invariants sont des opérateurs invariants.

Définition 1.2 *Un opérateur $\mathcal{H} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ est dit **causal** lorsque $\forall u, v \in \text{dom}(\mathcal{H}), \forall t \in \mathbb{R}$,*

$$\text{supp}(u - v) \subset [t, +\infty[\Rightarrow \text{supp}(\mathcal{H}(u) - \mathcal{H}(v)) \subset [t, +\infty[. \quad (1.1)$$

Bien qu'apparemment peu naturelle, cette définition de la causalité présente l'avantage considérable d'être applicable au cas général où u et v sont des distributions. L'addition et la composition d'opérateurs causaux sont des opérateurs causaux.

Définition 1.3 *Un opérateur $\mathcal{H} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ est dit (*t*-)**local** lorsque pour tout $t \in I$ et pour toutes fonctions $u, v \in \mathfrak{X}$ coïncidant sur un voisinage de t ,*

$$(\mathcal{H}u)(t) = (\mathcal{H}v)(t).$$

Ainsi, un opérateur \mathcal{H} est local lorsque la connaissance d'une fonction u sur un voisinage du point t suffit à déterminer $(\mathcal{H}u)(t)$. Des exemples fondamentaux d'opérateurs locaux sont d'une part les opérateurs statiques (cf. §1.1.1), d'autre part les opérateurs différentiels ∂_t^n , $n \in \mathbb{N}$. L'addition et la composition d'opérateurs locaux sont des opérateurs locaux. En particulier, tout opérateur différentiel (d'ordre fini, invariant ou non) est local.

Remarque 1.4 *Les propriétés topologiques (continuité, différentiabilité, etc.) des opérateurs impliqués dans un problème dépendra évidemment des espaces fonctionnels (topologiques) en jeu ; c'est là un point essentiel qui fait tout l'intérêt de l'approche trajectorielle des problèmes dynamiques, permettant ainsi d'adapter les topologies au problème considéré, ce qui n'a pas lieu avec les approches centrées sur l'espace d'état, du moins dans le cas d'espaces d'état de dimension finie.*

1.1.1 Opérateurs statiques

La classe des opérateurs statiques est essentielle de par la simplicité de ces opérateurs, leur omniprésence dans la formulation des systèmes et problèmes dynamiques, et leur intérêt pour la transformation de ces problèmes.

Définition 1.5 *Un opérateur $\mathcal{K} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ est dit **statique** s'il existe une fonction $K : I \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ telle que :*

$$\forall x \in \mathfrak{X}, (\mathcal{K}x)(t) = K(t, x(t)) \text{ pour (presque) tout } t \in I. \quad (1.2)$$

En d'autres termes, l'évaluation au point t de l'action d'un opérateur statique \mathcal{K} sur une fonction x ne requiert que la connaissance de $x(t)$. Un tel opérateur est trivialement local. A noter que, du point de vue de leur réalisation numérique, la non-linéarité de tels opérateurs est sans conséquence sur leur complexité (cf. paragraphe 1.1.5).

Cette classe d'opérateur constituera, dans la problématique de transformations opératoriels, la principale source de non-linéarité que l'on rencontrera, du fait, notamment, que dans la majorité des cas, les équations dynamiques présentent une séparation "naturelle" entre une partie dynamique linéaire et une partie statique non linéaire (c'est le cas, par exemple, des équation différentielle non linéaire explicites).

Notons en particulier que toute fonction t -invariante $K : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ induit un opérateur statique $\mathcal{K} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ t -invariant, défini par $\mathcal{K}(x) := K \circ x$, soit :

$$\forall x \in \mathfrak{X}, \mathcal{K}(x) : t \mapsto K(x(t)). \quad (1.3)$$

Remarque 1.6 *Excepté lorsque la distinction est nécessaire à la clarté de l'exposé, afin de ne pas alourdir les notations, l'abus habituel consistant à noter K aussi bien la fonction que l'opérateur statique qu'elle induit sera systématiquement commis.*

Exemple 1.7 *La fonction \sin induit l'opérateur statique $\sin : C^0(\mathbb{R}_t; \mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R}_t; \mathbb{R})$ défini par :*

$$\forall x \in C^0(\mathbb{R}_t; \mathbb{R}), \sin(x) : t \mapsto \sin(x(t))$$

1.1.2 Opérateurs linéaires dynamiques

D'après le théorème des noyaux de Schwartz [42], tout opérateur \mathcal{H} linéaire continu de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ s'exprime au moyen d'un noyau $\mathbf{h} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2) : \forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle \mathcal{H}u, \varphi \rangle = \langle \langle \mathbf{h}, u \rangle, \varphi \rangle$, ce qu'on notera abusivement, par souci de clarté et à condition qu'aucune confusion ne soit à craindre : $\mathcal{H}u = \int \mathbf{h}(\cdot, s)u(s)ds$, voire $(\mathcal{H}u)(t) = \int \mathbf{h}(t, s)u(s)ds$. Étendu aux distributions à valeurs vectorielles, ce cadre très général est suffisant pour définir sous une forme intégrale tous les opérateurs linéaires continus d'un espace de trajectoires dans un autre rencontrés en pratique.

Remarque 1.8 *Le noyau d'un opérateur linéaire continu peut être considéré comme l'analogue "trajectoriel" des matrices en tant qu'objets permettant de définir tous les opérateurs linéaires de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m .*

Remarque 1.9 *Pour les opérateurs linéaires locaux, le support de \mathbf{h} est nécessairement contenu dans la diagonale $t = s$. Pour cette raison, les opérateurs linéaires locaux de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sont essentiellement les opérateurs différentiels (d'ordre fini, à coefficient constants ou non).*

Définition 1.10 Un opérateur linéaire $\mathcal{H} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est dit **dynamique** lorsqu'il est causal ; il admet alors une formulation de la forme :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{h}(t, s)u(s)ds \quad (1.4)$$

(i.e. $\text{supp } \mathbf{h}$ est inclus dans l'ensemble $s \leq t$).

L'opérateur dynamique \mathcal{H} est dit **convolutif** (ou de convolution) lorsque le noyau \mathbf{h} est de la forme :

$$\mathbf{h}(t, s) = h(t - s);$$

on a alors :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \int_{-\infty}^t h(t - s)u(s)ds = (h * u)(t). \quad (1.5)$$

Dans le cas d'un opérateur de convolution, la distribution $h(s) = \mathbf{h}(t, t - s)$ est appelée *réponse impulsionnelle* de l'opérateur \mathcal{H} ; c'est la distribution obtenue par application de l'opérateur à la distribution (ou impulsion) de Dirac δ :

$$h(t) = (\mathcal{H}\delta)(t) = (h * \delta)(t).$$

Par extension, on appellera réponse impulsionnelle d'un opérateur intégral dynamique la distribution h définie formellement par :

$$h(t, s) = \mathbf{h}(t, t - s); \quad (1.6)$$

le support de la réponse impulsionnelle est dans tous les cas inclus dans $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_s^+$.

Définition 1.11 Le symbole-Laplace (ou simplement symbole) H d'un opérateur linéaire dynamique \mathcal{H} est la transformée de Laplace par rapport à la seconde variable de la réponse impulsionnelle h :

$$H(t, p) = (\mathcal{L}h(t, \cdot))(p) = \int_0^{+\infty} e^{-ps} h(t, s) ds.$$

On a donc en particulier¹ :

$$(\mathcal{H}u)(t) = (h(t, \cdot) * u)(t) = (\mathcal{L}^{-1} [H(t, \cdot)\mathcal{L}u])(t);$$

ceci conduit à adopter la notation symbolique de l'opérateur \mathcal{H} :

$$\mathcal{H} = H(t, \partial_t).$$

Lorsque l'opérateur \mathcal{H} est de convolution, son symbole est indépendant de t : $\mathcal{H} = H(\partial_t)$.

D'après le théorème de Titchmarsh [45],

Proposition 1.12 Tout opérateur (causal) non nul de convolution $H(\partial_t) : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vérifie la propriété :

$$H(\partial_t)u = 0 \Rightarrow u = 0.$$

Par conséquent, tout opérateur dynamique de convolution défini sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est formellement inversible. Cependant, la causalité n'est pas nécessairement conservée (par exemple l'inverse d'un opérateur de retard ne peut être causal).

¹On note \mathcal{L}^{-1} la transformation de Laplace inverse.

Notation 1.13 Lorsque cet opérateur est causal, on notera $H(\partial_t)^{-1}$ l'inverse formel de $H(\partial_t)$.

En particulier, l'opérateur de dérivation ∂_t est inversible en tant qu'opérateur défini de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Bien évidemment, ∂_t n'est pas inversible lorsqu'il agit sur un espace fonctionnel contenant les trajectoires constantes. Par commodité, on désignera néanmoins dans tous les cas par ∂_t^{-1} l'inverse de ∂_t en tant qu'opérateur sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$:

Notation 1.14 On note ∂_t^{-1} l'opérateur dynamique défini par :

$$\partial_t^{-1}u = \int_{-\infty}^t u(s) ds. \quad (1.7)$$

L'extension aux opérateurs abstraits $\mathcal{H} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ se fait de façon naturelle. Tout d'abord, par prolongement continu, un opérateur dynamique $H(\partial_t)$ défini sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ peut être étendu naturellement (lorsque c'est possible) à divers espaces de trajectoires comme par exemple des espaces de Sobolev de type $W^{n,p}$ ou encore C^n . Ainsi par exemple, l'opérateur ∂_t est continu de $W^{n,p}$ dans $W^{n-1,p}$ [7].

Ensuite, lorsque \mathbf{X} et \mathbf{Y} sont des espaces vectoriels de dimensions finies n, m , l'opérateur \mathcal{H} s'identifie à une matrice finie d'opérateurs : $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_i^j)$, où chaque \mathcal{H}_i^j est un opérateur "scalaire"; l'expression intégrale de l'opérateur étant :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{h}(t, s)u(s) ds = \int_{-\infty}^t \sum_{j=1}^m \mathbf{h}_i^j(t, s)u_j(s) ds;$$

le symbole H est alors à valeurs matricielles dans $\mathbb{C}^{n \times m}$, de telle sorte qu'il est encore possible d'écrire : $\mathcal{H} = H(t, \partial_t)$.

Enfin, le cas où \mathbf{X} et/ou \mathbf{Y} sont des espaces de Banach nécessite l'emploi de la théorie des distributions à valeurs vectorielles. Pour la suite de l'exposé, il sera cependant suffisant de considérer que dans le cas général, un opérateur linéaire dynamique $\mathcal{H} : \mathcal{D}(\mathbb{R}; \mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}; \mathbf{Y})$ admet l'expression intégrale (abusive) : $(\mathcal{H}u)(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{h}(t, s)u(s)ds$ avec $\mathbf{h} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2; \mathcal{L}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}))$. Le symbole $H(t, p)$ ($H(p)$ si \mathcal{H} est invariant) est quant à lui à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbf{X}_{\mathbb{C}}; \mathbf{Y}_{\mathbb{C}})$ où $\mathbf{X}_{\mathbb{C}}, \mathbf{Y}_{\mathbb{C}}$ sont les espaces de Banach complexes définis à partir de \mathbf{X} et \mathbf{Y} . L'opérateur \mathcal{H} s'écrit ainsi à nouveau $H(t, \partial_t)$.

Remarque 1.15 La continuité des opérateurs de convolution est aisément obtenue en choisissant des topologies adaptées au comportement asymptotique à haute fréquence du symbole $H(i\omega)$. Ainsi par exemple, l'opérateur ∂_t , de symbole p , est continu de $W^{1,\infty}$ dans L^∞ .

1.1.3 Opérateurs ponctuels

Les opérateurs précédents transformaient des trajectoires en d'autres trajectoires. Les opérateurs qualifiés de ponctuels sont au contraire soit définis sur un espace de points, soit à valeurs dans un espace de points, le terme "point" désignant un élément d'un espace dans lequel évoluent les trajectoires. De tels opérateurs permettent par exemple de définir les conditions initiales d'une trajectoire solution d'une équation différentielle. On considère essentiellement deux types de tels opérateurs, définis comme suit.

Définition 1.16 Pour $t_0 \in I$, on note $\delta_{t_0}^{(n)} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbf{X}$ l'opérateur défini par :

$$\delta_{t_0}^{(n)} \cdot x = (\partial_t^n x)(t_0). \quad (1.8)$$

Dans le cas particulier $t_0 = 0$, $n = 0$, on note $\delta_0^{(0)} = \delta$ et on a : $\delta \cdot x = x(0)$. L'opérateur $\delta_{t_0}^{(n)}$ est clairement continu par exemple si $\mathfrak{X} = C^n(I; \mathbf{X})$.

On suppose \mathbf{X} réflexif et on note $\delta_{t_0}^{(n)} \in \mathcal{D}'$ la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la distribution de Dirac en t_0 .

Définition 1.17 Pour $t_0 \in \overset{\circ}{I}$, on note $(\cdot) \cdot \delta_{t_0}^{(n)} : \mathbf{X} \rightarrow \mathcal{D}'(I; \mathbf{X})$ l'opérateur défini par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I; \mathbf{X}'), \quad \langle x_0 \cdot \delta_{t_0}^{(n)}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(I; \mathbf{X}), \mathcal{D}(I; \mathbf{X}')} = \langle \delta_{t_0}^{(n)}, \langle x_0, \varphi \rangle_{\mathbf{X}, \mathbf{X}'} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}.$$

Autrement dit, $x_0 \cdot \delta_{t_0}^{(n)}$ est une trajectoire distribution de support ponctuel $\{t_0\}$ et à valeurs dans \mathbf{X} . Dans le cas $t_0 = 0$, $n = 0$, on note $x_0 \cdot \delta_{t_0}^{(n)} = x_0 \cdot \delta$. L'opérateur $(\cdot) \cdot \delta_{t_0}^{(n)}$ est clairement continu.

Les opérateurs ponctuels ne sont évidemment ni des opérateurs statiques ni des opérateurs locaux, les espaces en jeu étant incompatibles avec la définition de ces propriétés. Toutefois, ils partagent avec ces derniers une grande simplicité du fait qu'un seul instant t_0 intervient dans la formulation. Pour cette raison, on introduit la définition suivante qui sera utile pour qualifier certains modèles dynamiques.

Définition 1.18 Un opérateur est dit **quasi local** (resp. **quasi statique**) lorsqu'il est constitué d'une somme finie d'opérateurs locaux (resp. statiques) ou ponctuels.

Exemple 1.19 L'opérateur $(u, x) \mapsto (H(\partial_t)x - f(u, x), \delta \cdot x) = (H(\partial_t)x - f(u, x), 0) + (0, \delta \cdot x)$ où f est une fonction (i.e. un opérateur statique) est quasi local si et seulement si $H(\partial_t)$ est un opérateur différentiel. Il en est de même pour l'opérateur $(u, x) \mapsto (H(\partial_t)x - f(u, x) - x_0 \delta)$.

1.1.4 Réalisations locales d'opérateurs

La classe des opérateurs à réalisation locale, décrite ci-après, est intéressante tant par les propriétés spécifiques héritées des problèmes de Cauchy que du point de vue de leur relative simplicité de mise en œuvre numérique *au moins dans certains cas*. En effet, de manière intuitive, on peut dire qu'un opérateur à réalisation locale est un opérateur "presque local" dans la mesure où son évaluation numérique peut être obtenu par intégration d'une équation différentielle de façon **précise et peu coûteuse**. Cette dernière condition n'est pas systématiquement vérifiée, mais elle l'est dans de nombreux cas, notamment lorsque la réalisation locale est de type *diffusif*.

Par simplicité et sans perte de généralité, on suppose dans la suite que les opérateurs considérés agissent sur des fonctions à support dans \mathbb{R}_t^+ .

On considère deux opérateurs t -locaux $\mathbf{S}(\cdot, \cdot)$ et $\mathbf{T}(\cdot, \cdot)$, avec $\mathbf{S}(\cdot, u)$ statique pour toute u , et le problème de Cauchy, supposé bien posé :

$$\partial_t \psi = \mathbf{S}(\psi, u), \quad \psi(0) = 0. \quad (1.9)$$

Définition 1.20 Un opérateur causal \mathcal{H} est dit **réalisé localement** par les opérateurs \mathbf{S} et \mathbf{T} si $\forall u$, $\mathcal{H}(u) = \mathbf{T}(\psi, u)$ où ψ est solution de (1.9); autrement dit, $y = \mathcal{H}(u)$ est obtenue par la réalisation d'état :

$$\begin{cases} \partial_t \psi = \mathbf{S}(\psi, u), & \psi(0) = 0, \\ y = \mathbf{T}(\psi, u). \end{cases} \quad (1.10)$$

De façon plus concise, on dira que \mathcal{H} est à réalisation locale (\mathbf{S}, \mathbf{T}) . Sous réserve que la résolution numérique de (1.10) ne présente pas de difficulté particulière et que la dimension de la variable d'état $\psi(t)$ soit "raisonnable", de tels opérateurs seront compatibles avec les contraintes de mise en œuvre numérique, éventuellement en temps réel, le coût numérique de tels opérateurs ainsi réalisés étant alors du même ordre que celui d'un opérateur local.

Remarque 1.21 *La formulation d'un tel opérateur sous la forme (1.10) n'est évidemment pas unique.*

Exemple 1.22 *Tout opérateur local K admet la réalisation locale triviale $\partial_t \psi = 0$, $y = K(u)$.*

Exemple 1.23 *L'opérateur non local ∂_t^{-1} admet la réalisation locale :*

$$\begin{cases} \partial_t \psi = u, & \psi(0) = 0, \\ y = \psi. \end{cases} \quad (1.11)$$

Exemple 1.24 *Tout problème de Cauchy bien posé $\partial_t x = F(u, x)$, $x(0) = 0$ est trivialement une réalisation locale de l'opérateur \mathbf{F} donnant sa solution : $u \mapsto x = \mathbf{F}(u, x_0)$.*

Proposition 1.25 *La classe des opérateurs à réalisation locale est stable par addition et composition.*

Preuve. Si \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 deux opérateurs à réalisation locales respectives $(\mathbf{S}_1, \mathbf{T}_1)$ et $(\mathbf{S}_2, \mathbf{T}_2)$ alors $(\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2)$ a pour réalisation locale :

$$\begin{cases} \partial_t \psi_1 = \mathbf{S}_1(\psi_1, u) \\ \partial_t \psi_2 = \mathbf{S}_2(\psi_2, u) \\ (\mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_1)(u) = \mathbf{T}_1(\psi_1, u) + \mathbf{T}_2(\psi_2, u), \end{cases}$$

les opérateurs $\mathbf{S} = (\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2)^T$ et $\mathbf{T} : (\psi_1, \psi_2, u) \mapsto \mathbf{T}_1(\psi_1, u) + \mathbf{T}_2(\psi_2, u)$ étant clairement locaux.

De même, $(\mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1)$ a pour réalisation locale :

$$\begin{cases} \partial_t \psi_1 = \mathbf{S}_1(\psi_1, u) \\ \partial_t \psi_2 = \mathbf{S}_2(\psi_2, \mathbf{T}_1(\psi_1, u)) \\ (\mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1)(u) = \mathbf{T}_2(\mathbf{T}_1(\psi_1, u), \psi_2), \end{cases}$$

les opérateurs $\mathbf{S} = (\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2 \circ (I, \mathbf{T}_1))^T$ et $\mathbf{T} = \mathbf{T}_2 \circ (\mathbf{T}_1, I)$ étant, là encore, locaux. ■

Une classe importante d'opérateurs admettant une réalisation locale est celle des opérateurs linéaires *diffusifs* [35] : la *représentation diffusive* permet en effet de réaliser des opérateurs linéaires dynamiques présentant certaines propriétés, en pratique peu restrictives, par une réalisation d'état (de dimension infinie) de la forme :

$$\begin{cases} \partial_t \psi(t, \xi) = \gamma(\xi) \psi(t, \xi) + u(t), & \forall (t, \xi) \in \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_\xi, \quad \psi(0, \xi) = 0 \\ (\mathcal{H}u)(t) = \int_{\mathbb{R}} \mu(t, \xi) \psi(t, \xi) d\xi, \end{cases} \quad (1.12)$$

où γ est une fonction définissant un arc fermé (éventuellement à l'infini) dans \mathbb{C}^- englobant toutes les singularités du symbole $H(t, p)$ de \mathcal{H} , et μ est un objet fonctionnel (voire, en général, distributionnel) dépendant de γ et résumant entièrement l'opérateur \mathcal{H} . La nature diffusive de (1.12) permet entre autres des réalisations numériques économiques ne nécessitant qu'un faible nombre de points de discrétisation en ξ . La représentation diffusive est présentée plus en détail dans le chapitre 3.

Une autre classe d'opérateurs à réalisation locale particulièrement intéressante par sa simplicité et sa portée est la suivante :

Définition 1.26 Un opérateur \mathcal{H} est dit **pseudo-linéaire** s'il est de la forme :

$$\mathcal{H} = G \circ H(\partial_t) \circ F,$$

où G, F sont des opérateurs statiques, et $H(\partial_t)$ un opérateur de convolution à réalisation locale (linéaire) $((\mathbf{A}, \mathbf{B}), (\mathbf{C}, \mathbf{D}))$. L'opérateur \mathcal{H} admet alors la réalisation locale :

$$\begin{cases} \partial_t \psi = \mathbf{A}\psi + \mathbf{B}F(u), & \psi(0) = 0, \\ \mathcal{H}(u) = G(\mathbf{C}\psi + \mathbf{D}u). \end{cases}$$

En particulier, lorsque $H(\partial_t)$ est un opérateur diffusif, \mathcal{H} admet une réalisation locale diffusive de la forme :

$$\begin{cases} \partial_t \psi = \gamma \psi + F(u) \\ \mathcal{H}(u) = G\left(\int \mu \psi d\xi\right). \end{cases}$$

1.1.5 Remarques sur la complexité numérique d'opérateurs

D'une manière générale, les combinaisons d'opérateurs pseudo-linéaires, de changement de temps, d'hystérésis, etc. seront considérés dans la suite comme des objets formellement et numériquement manipulables compte tenu de la puissance de calcul disponible à l'heure actuelle.

C'est sur cette hypothèse de réalisabilité numérique d'une vaste classe d'opérateurs (contenant en particulier la plupart des opérateurs de convolution $H(\partial_t)$), difficilement formulable en termes précis et universels mais légitime dans bien des cas, que s'appuient les techniques de transformation présentées dans cette thèse.

Bien évidemment, en pratique, le passage au numérique devra néanmoins être effectué prudemment, en particulier en essayant de maîtriser les erreurs numériques engendrées à chaque étape. Outre l'analyse et les manipulations formelles, la complexité de opérateurs d'un point de vue numérique est en effet un point important à considérer avec précautions en vue de la mise en œuvre concrète des outils développés. On donne ici quelques indications seulement destinées à illustrer les propriétés relatives à la complexité numériques pour les différentes classes d'opérateurs précédemment introduites.

En un sens, les opérateurs linéaires sont aux fonctions ce que les matrices sont aux vecteurs ; la complexité des opérations matrices/vecteurs est usuellement quantifiée en utilisant la notation $O(n^\alpha)$, où n est la taille des vecteurs manipulés. De façon similaire, on notera par convention T la complexité d'une trajectoire de \mathbb{R}_t , ce nombre désignant, lors de mises en œuvres numériques, le nombre de points de discrétisation en temps de la trajectoire, alors représentée par un *vecteur*. On peut ainsi quantifier, de manière formelle, la complexité des différentes classes d'opérateurs introduites précédemment, i.e. la complexité de l'évaluation de la trajectoire $\mathcal{K}x$.

Les opérateurs linéaires statiques sont l'analogue des matrices diagonales : leur évaluation à l'instant t ne nécessite que la connaissance de la trajectoire à l'instant t ; la complexité de l'évaluation de la trajectoire $\mathcal{K}x$ est donc $O(T)$: elle grandit linéairement avec le temps, ou, de façon équivalente, la complexité nécessaire à un instant t est constante. Il est important de noter que la non-linéarité de tels opérateurs est sans conséquence sur leur complexité ; en effet, la non-linéarité d'un opérateur statique nécessite, pour le calcul de $(\mathcal{K}x)(t)$, un nombre fini k d'opérations en général négligeable devant T : on obtient ainsi une complexité totale de l'ordre de kT , soit encore $O(T)$. La complexité des opérateurs locaux est par ailleurs également constante au cours du temps et leur manipulation n'est guère plus contraignante que celle des opérateurs statiques.

Les opérateurs linéaires dynamiques généraux sont quant à eux similaires à des matrices (*a priori* pleines) de dimension $T \times T$, la causalité impliquant le caractère triangulaire de ces matrices du fait que l'évaluation de la quantité $(\mathcal{K}x)(t)$ nécessite seulement la connaissance du passé de la trajectoire x (cf. formulation 1.5). Ainsi, le calcul de $\mathcal{K}x$ est de complexité (croissante au cours du temps) en $O(T^2)$ et est, de ce fait, incompatible avec une mise en œuvre en temps réel, la complexité à l'instant t n'étant plus constante, mais grandissant linéairement avec t .

Les opérateurs à réalisation locale sont en revanche de complexité constante au cours du temps et sont peu coûteux sous réserve que la dimension de la variable d'état de leur réalisation soit "raisonnable"; concernant ce dernier point, les opérateurs linéaires $H(t, \partial_t)$ admettant une réalisation diffusive sont particulièrement intéressants [35, 9], et peuvent être réalisés avec une complexité en $O(T)$.

Remarque 1.27 *Bien que les opérateurs dynamiques linéaires soient dans la plupart des cas résolubles sans difficulté, il peut arriver, notamment dans le cas de modèles répartis spatiaux-temporels, que la complexité numérique de leur résolution nécessite une étude préalable spécifique (cf. chapitre 7).*

1.2 Formulation abstraite et transformation de systèmes et problèmes dynamiques

On propose une formulation abstraite, bien adaptée à la problématique de transformation opératorielle, des modèles et problèmes dynamiques. L'intérêt de cette formulation est une écriture synthétique et, par conséquent, une vision globale des problèmes dynamiques rencontrés en automatique au sens le plus général, ce qui permettra une présentation à la fois générale et unifiée. Bien évidemment, ce formalisme abstrait n'a pas pour vocation de se substituer à l'analyse spécifique, nécessaire lorsqu'un problème concret est abordé, mais simplement de décrire de façon aussi simple que possible et dans un cadre abstrait les principes mis en œuvre.

1.2.1 Formulation trajectorielle des modèles dynamiques

Le modèle est le point de départ de tout problème dynamique. Dans le cas standard de modèles *différentiels explicites*, de la forme $\dot{x} = f(u, x)$, la propriété de localité des opérateurs ∂_t et f a pour conséquence que ces modèles sont souvent interprétés au sens local, à savoir comme l'équation "ponctuelle" dans l'espace d'état : $\forall t, \dot{x}(t) = f(u(t), x(t))$, la *fonction* f portant toute l'information sur le modèle et la variable d'état $x(t)$ portant l'information nécessaire et suffisante pour déterminer l'évolution future de la trajectoire x . Pour cette raison, la plupart des transformations traditionnellement utilisées dans le contexte différentiel sont dans l'espace d'état.

Cependant, ce cadre trouve ses limites lorsque le modèle est intégro-différentiel, de la forme $H(\partial_t)x = f(u, x)$; en effet, contrairement à $\dot{x}(t)$ dont l'évaluation ne nécessite la connaissance de la trajectoire x que sur un voisinage arbitrairement petit de t , l'évaluation de $(H(\partial_t)x)(t)$ nécessite *a priori* tout le passé de x , c'est à dire la *trajectoire* $x|_{[-\infty, t]}$. En conséquence, la problématique de transformation de modèle se situe d'emblée dans le cadre *trajectoriel*, les modèles étant formulés en termes d'équations dans des variétés (topologiques) de trajectoires, et il apparaît dès lors naturel d'étendre autant que possible la classe des transformations utilisables, les transformations standard (statiques) dans l'espace d'état ne constituant qu'un cas particulier remarquable.

Notons que, de façon assez surprenante, certaines transformations opératoriels *non locales*, pouvant sembler *a priori* sans intérêt dans le cas de modèles différentiels explicites, pourront au contraire s'avérer fort utile également dans ce cadre (cf. chapitre 8).

Définition 1.28 On appelle **modèle** une équation de la forme :

$$\Phi(u, x) = 0, \quad (u, x) \in \mathcal{U} \times \mathcal{X}, \quad (1.13)$$

avec \mathcal{U}, \mathcal{X} des variétés topologiques, \mathcal{S} un espace vectoriel topologique et un opérateur $\Phi : \mathcal{U} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$. On appellera x l'état et u l'inconnue ou l'indéterminée (du modèle).

Par défaut², on supposera en outre que le modèle (1.13) constitue un problème bien posé au sens de Hadamard, i.e. pour tout $u \in \mathcal{U}$, il existe un et un seul $x \in \mathcal{X}$ tel que d'une part (u, x) soit solution de (1.13), et d'autre part la correspondance (implicite en général) $\mathbf{F} : u \mapsto x$ soit continue.

Définition 1.29 Le modèle (1.13) est dit **dynamique** lorsque :

- \mathcal{U}, \mathcal{X} sont des variétés d'espaces vectoriels de trajectoires définies sur $I \subset \mathbb{R}_t$.
- L'opérateur \mathbf{F} est causal.

Remarque 1.30 ► L'écriture (1.13) inclut en particulier les modèles "statiques" (c'est-à-dire lorsque \mathbf{F} est statique), qui apparaissent ainsi comme des modèles dynamiques particuliers). En général, \mathbf{F} est un opérateur non local. En outre, la relation

$$x = \mathbf{F}(u) \quad (1.14)$$

est l'écriture du modèle (1.13) sous forme résolue, dont l'expression effective n'est accessible, en général, que par voie numérique. On notera les équivalences suivantes, abondamment utilisée par la suite :

$$\Phi(u, x) = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{F}(u) \Leftrightarrow (u, x) \in \text{graphe}(\mathbf{F}). \quad (1.15)$$

- Le fait que (1.13) soit supposée bien posé implique notamment qu'elle intègre d'éventuelles équations comme les "condition initiale" ou autres, relatives à l'unicité de la solution x (lorsque u est fixée).
- L'état désigne en fait la trajectoire dans l'espace d'état ; cet "abus" de terminologie sera sans conséquence dans la suite.

Dans la suite, les modèles considérés seront par défaut supposés dynamiques.

Définition 1.31 Un modèle dynamique sera qualifiée d'**explicite** lorsque $\Phi(u, x) = \mathcal{H}x - \mathcal{F}(u, x)$ où :

- \mathcal{H} est un opérateur linéaire causal inversible,
- $\mathcal{F}(u, \cdot)$ est un opérateur statique.

Lorsqu'en outre \mathcal{F} est de la forme : $\mathcal{F}(u, x) = Ax + Bu$ où A, B sont des opérateurs statiques linéaires, le modèle est dit linéaire, et linéaire invariant si A, B sont indépendants de t .

Remarque 1.32 Si le modèle est linéaire, on a alors : $\tilde{\mathcal{H}}u = (\mathcal{H} - A)x = Bu$ et, si $(\mathcal{H} - A)$ est inversible, $x = (\mathcal{H} - A)^{-1}Bu = \tilde{\mathcal{H}}^{-1}u$. Sans perdre de généralité³, on peut donc supposer que les modèles linéaires sont résolus, sous la forme $x = \mathcal{K}u$, où \mathcal{K} est linéaire.

²Dans certains cas cependant, l'établissement de la nature bien posée de (1.13) pourra constituer un problème préalable, devant être traité avant tout autre (cf. par exemple chapitre 6).

³Le cas $\mathcal{H} - A$ non inversible étant singulier, il est considéré comme faisant partie de la problématique générale non linéaire.

Définition 1.33 Un modèle dynamique est dit **local** lorsque l'opérateur Φ est un opérateur quasi local.

Exemple 1.34 Le modèle (explicite)

$$\begin{cases} H(\partial_t)x - f(u, x) = 0 \\ \delta \cdot x = 0 \end{cases}$$

où f est une fonction (i.e. un opérateur statique) est local si et seulement si $H(\partial_t)$ est un opérateur différentiel.

Exemple 1.35 Soit un système différentiel explicite dans \mathbb{R}^n :

$$\begin{cases} \partial_t x = f(v, x) \\ x(0) = x_0; \end{cases}$$

si on suppose que la condition initiale x_0 est inconnue, alors ce système s'écrit $\mathcal{H}x - \mathcal{F}(u, x) = 0$, en posant $u := (v, x_0)^T$ et :

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \partial_t \\ \delta \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}(u, x) = \begin{pmatrix} f(u_1, x) \\ u_2 \end{pmatrix},$$

avec (par exemple) : $\mathcal{X} \subset C^1([0, T]; \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{U} \subset C^0([0, T]; \mathbb{R}^p) \times \mathbb{R}^n$. Ce modèle est en outre dynamique explicite et local.

Le même système s'écrit encore $\mathcal{H}x - \mathcal{F}(u, x) = 0$ avec :

$$\mathcal{H} = \partial_t, \quad \mathcal{F}(u, x) = f(u_1, x) + u_2 \cdot \delta,$$

avec : $\mathcal{X} \subset C_+^1(\mathbb{R}_t; \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{U} \subset C_+^0(\mathbb{R}_t; \mathbb{R}^p)$, où $C_+^k(\mathbb{R}_t; \mathbb{R}^q) := \{f \in C^k(\mathbb{R}_t; \mathbb{R}^q), \text{ supp } f \subset \mathbb{R}^+\}$.

Exemple 1.36 Si on suppose que x_0 est connu, alors ce système s'écrit $\mathcal{H}x - \mathcal{F}(u, x) = 0$, avec $u := v$ et :

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \partial_t \\ \delta \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}(u, x) = \begin{pmatrix} f(u, x) \\ x_0 \end{pmatrix}$$

(la quantité x_0 faisant partie de la définition de l'opérateur \mathcal{F}).

Comme cela apparaît dans les exemples précédents, la formulation d'un modèle dynamique se veut à ce stade très générale, au sens où l'indéterminée u peut désigner toute quantité qui doit être déterminée par résolution d'un *problème* posé sur le modèle : commande, paramètres à identifier à partir de mesures physiques, estimation d'état, etc.

Le cas des systèmes différentiels ordinaires est par ailleurs loin d'épuiser tous les modèles explicites que l'on peut rencontrer en pratique. La formulation du modèle au sens global des trajectoires devient en particulier incontournable pour les modèles héréditaires, c'est-à-dire impliquant des opérateurs non locaux (intégral-différentiels, pseudo-différentiels, de Volterra etc.). De ce point de vue, les modèles dynamiques explicites (non locaux) de la forme :

$$H(\partial_t)x = \mathcal{F}(u, x),$$

où $H(\partial_t)$ est un opérateur linéaire diffusif constitueront une classe de modèles à la fois importante pour les applications et de complexité raisonnable.

1.2.2 Problèmes dynamiques

En tant qu'équation liant deux variables (fonctionnelles) u et x , le modèle (1.13) est *a priori* sous-déterminé ; un problème d'automatique général consiste alors à adjoindre à (1.13) une condition supplémentaire afin d'obtenir un système bien posé au sens de l'existence et unicité du couple (u, x) solution. Ceci motive la définition qui suit.

Définition 1.37 On appelle **problème dynamique** un problème de la forme :

$$\begin{cases} \Phi(u, x) = 0 \\ \mathbb{P}(u, x) = 0, \end{cases} \quad (u, x) \in \mathcal{U} \times \mathcal{X}, \quad (1.16)$$

où $\Phi = 0$ est un modèle dynamique et $\mathbb{P} : \mathcal{U} \times \mathcal{X} \rightarrow \{0, 1\}$ est une “propriété”⁴.

Typiquement, la propriété \mathbb{P} pourra prendre la forme $\mathbf{J}(u, x) = 0$ où \mathbf{J} est un opérateur continu, ou encore $\mathcal{J}(u, x) = \min$ avec \mathcal{J} une fonctionnelle de coût.

On peut remarquer que si le modèle est bien posé par rapport à u , le problème (1.16) peut être résumé par l'équation formelle :

$$\mathbb{P}(u, \mathbf{F}(u)) = 0, \quad u \in \mathcal{U};$$

en ce sens, la quantité u représente l'*inconnue effective* du problème dynamique (commande en boucle ouverte, paramètres à identifier, correcteur, etc.), x étant l'état (en tant que trajectoire) du système dynamique.

En pratique, la formulation du système dynamique lui-même sous la forme (1.13) sera fortement conditionnée par le problème dynamique qui lui sera associé, celui-ci déterminant entre autres ce que “représentera” la quantité u et, de fait, l'expression de l'opérateur Φ , qui englobera toute les quantités connues du problème dynamique. Ceci sera illustré par quelques exemples.

Remarque 1.38 Il convient à ce stade de souligner l'importance de ne pas commettre d'amalgame entre u , l'inconnue du problème dynamique (1.16), et l'entrée du système dynamique, traditionnellement notée de la même manière : celles-ci coïncident, par exemple, pour un problème classique de commande en boucle ouverte, mais pas pour d'autres problèmes tels que l'identification ou la conception d'observateurs ; u pourra ainsi contenir l'entrée du modèle dynamique ou pas, selon les problèmes considérés. Les exemples du prochain paragraphe illustreront ce point.

1.2.3 Quelques exemples

Pour illustration, on présente ci-après la mise sous la forme (1.16) de quelques problèmes dynamiques classiques. L'intérêt est essentiellement pédagogique : une telle formulation n'a évidemment pas prétention à améliorer par elle-même la résolution technique des problèmes présentés.

Contrôle d'un système différentiel

Soit le système dynamique modélisé par l'équations différentielle :

$$\begin{cases} \partial_t x = f(u, x) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m), \quad x \in C^0([0, T]; \mathbb{R}^n) \quad (1.17)$$

où u est la commande du système et f une fonction $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lipschitzienne par rapport à la seconde variable. On pose alors le problème de déterminer une commande u^* minimisant

⁴Devant être vérifiée par (u, x) , avec la convention : $0 \sim \text{Vrai}$, $1 \sim \text{Faux}$.

une fonctionnelle $\mathbf{J}_1(u, x)$. L'expression d'un tel problème, d'inconnue u , sous la forme (1.16) est immédiate :

$$\begin{cases} \Phi(u, x) := \begin{pmatrix} \partial_t x - f(u, x) \\ \delta \cdot x - x_0 \end{pmatrix} = 0 & u \in \mathcal{U} = L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m) \\ \mathcal{J}_1(u, x) = \min. & x \in \mathcal{X} \subset C^0([0, T]; \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

On constate que la valeur x_0 de la condition initiale est dans ce cas considérée comme étant une donnée du problème; on peut également envisager de la considérer comme une inconnue (par exemple si celle-ci peut être choisie) avec u , à déterminer par la résolution du problème que l'on écrit alors :

$$\begin{cases} \Phi(\begin{pmatrix} u \\ x_0 \end{pmatrix}, x) := \begin{pmatrix} \partial_t x - f(u, x) \\ \delta \cdot x - x_0 \end{pmatrix} = 0 & \begin{pmatrix} u \\ x_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{U} = L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^n \\ \mathcal{J}_2(\begin{pmatrix} u \\ x_0 \end{pmatrix}, x) = \min. & x \in \mathcal{X} \subset C^0([0, T]; \mathbb{R}^n) \end{cases}.$$

Ceci illustre ce qui a été dit précédemment, à savoir que l'expression de l'opérateur Φ (c'est-à-dire du modèle) est liée au problème considéré.

Remarque 1.39 Dans le cas d'un problème de conception de correcteur en boucle fermée, l'inconnu sera constituée, abstraitement, du correcteur \mathcal{K} (c'est-à-dire, une fois la structure du correcteur définie, des paramètres de celui-ci), sur lequel sera choisie une contrainte de performances, stabilité, etc.; le modèle Φ constituera quant à lui les équations dynamique du système en boucle fermée.

Observation - Filtrage d'un système différentiel

On considère le système dynamique régi par les équations :

$$\begin{cases} \partial_t x = f(x, u, w) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y = g(x, u, v) \end{cases} \quad (1.18)$$

où u est l'entrée du système, v, w des bruits et y le signal mesuré (les bruits v, w étant nuls pour un problème d'observation). Sans plus de précisions, un problème d'observation (ou de filtrage) abstrait sur (1.18) consisterait à choisir un observateur \mathcal{K} permettant de construire une estimation \hat{x} (en un sens à préciser) de x à partir de la connaissance de y et de u , parmi une classe d'observateurs préalablement définie par une équation (généralement dynamique) :

$$\alpha(\mathcal{K}, u, y, \hat{x}) = 0, \quad (1.19)$$

le choix de \mathcal{K} se traduisant, par exemple, par une propriété de la forme⁵ $\min_{\mathcal{K}} \mathcal{J}(\mathcal{K}, x, \hat{x}, y)$. L'inconnue d'un tel problème est donc \mathcal{K} , le modèle de l'ensemble "système + observateur" étant alors constitué de (1.18) et de (1.19) :

$$\begin{cases} \Phi(\mathcal{K}, \begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} \partial_t x - f(x, u, w) \\ \delta \cdot x - x_0 \\ \alpha(\mathcal{K}, u, y, \hat{x}) \end{pmatrix} = 0 & \mathcal{K} \in \mathcal{U} \\ \mathbb{P}(\mathcal{K}, \begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix}) = 0 & \begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix} \in \mathcal{X} = C^0([0, T]; \mathbb{R}^n)^2 \end{cases} \quad (1.20)$$

où $\mathbb{P}(\mathcal{K}, \begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix}) := [\mathcal{J}(\mathcal{K}, x, \hat{x}, g(x, u, v)) = \min]$.

⁵le domaine de \mathcal{K} n'étant pas précisé car d'importance secondaire ici.

Remarque 1.40 *La trajectoire y est ici considérée comme une donnée du problème.*

A titre d'illustration, on considère le système dynamique linéaire :

$$\begin{cases} \partial_t x = Ax + Bu + Mw \\ x(0) = x_0 \\ y = Cx + Du + v, \end{cases}$$

où A, B, C, D, M sont des opérateurs statiques linéaires et v, w des bruits blancs gaussiens centrés. Le filtre de Kalman–Bucy est un estimateur d'état non biaisé, dont l'équation d'évolution (1.19) est donnée par :

$$\begin{cases} \partial_t \hat{x} = A\hat{x} + Bu + K_f (y - C\hat{x} - Du) \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0, \end{cases}$$

K_f étant la matrice de gain de Kalman. Le choix du correcteur, i.e. le choix de K_f , se fait alors via un critère de minimisation de la variance de l'erreur d'estimation ; il est bien connu que la solution du problème dynamique (1.20) se ramène alors à résoudre l'équation (de Ricatti) :

$$\begin{cases} \partial_t P = AP + PA^T - K_f R K_f^T + MQM^T \\ P(0) = P_0 \\ K_f = P C^T R^{-1}, \end{cases}$$

où R et Q sont les densités spectrales respectives de v et w , et P la matrice de covariance de l'erreur d'estimation. On a donc une formulation de ce problème (donnée pour simple illustration) :

$$\begin{cases} \Phi(K_f, \begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} \partial_t x - Ax - Bu - Mw \\ \delta \cdot x - x_0 \\ \partial_t \hat{x} - A\hat{x} - Bu - K_f (C(x - \hat{x}) + v) \\ \delta \cdot x - \hat{x}_0 \end{pmatrix} = 0 \\ \mathbb{P}(K_f, \begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix}) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} K_f \in \mathcal{U} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix} \in \mathcal{X} \subset C^0([0, T]; \mathbb{R}^n)^2, \end{matrix}$$

où $\mathbb{P}(K_f, \begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix})$ est la propriété $E \left[\|x(T) - \hat{x}(T)\|_{\mathbb{R}^n}^2 \right] = \min$.

Identification de modèles dynamique non locaux

De manière générale, l'identification de modèle consiste à déterminer un modèle mathématique expliquant au mieux (en un sens à préciser) des mesures. On peut pour cela chercher à soit identifier l'intégralité du modèle, soit partir d'une structure générique. Ainsi dans le problème suivant, les paramètres désignés par λ sont à identifier à partir de mesures y :

$$\begin{cases} \Phi(\lambda, x) := \partial_t x - f(\lambda, x) = 0 \\ \mathbb{P}(\lambda, x) := \left[\|x(\lambda) - y\|_{L^2(0, T)}^2 = \min \right]. \end{cases}$$

Dans [9] par exemple, l'auteur identifie des modèles dynamiques non locaux de la forme :

$$H(\partial_t) x = f(x) + u, \quad (1.21)$$

l'opérateur convolutif $H(\partial_t)$ et la fonction f étant tous deux inconnus, à partir de mesures bruitées de l'état x , notées y . Une transformation préalable de (1.21) est effectuée, afin de l'écrire sous la forme :

$$\mu \cdot \mathcal{A}x - f(x) - u = 0,$$

où \mathcal{A} est un opérateur linéaire dynamique et μ une fonction caractérisant l'opérateur à identifier $H(\partial_t)$. Cette nouvelle formulation du modèle permet alors de poser le problème d'identification plus simplement, et on cherche à minimiser une erreur d'identification de la forme $\|x - y\|_{L^2(0,T)}^2$. Formellement, ce problème dynamique s'écrit donc⁶ :

$$\begin{cases} \Phi((\mu_f), x) := \mu \cdot \mathcal{A}x - f(x) - u = 0 \\ \mathbb{P}((\mu_f), x) = 0, \end{cases}$$

où $\mathbb{P}((\mu_f), x) := \left[\|x - y\|_{L^2(0,T)}^2 = \min \right]$.

Notons que l'intérêt de telles transformations de modèles est de permettre une formulation mieux adaptée au problème d'identification qui serait, s'il était formulé sur (1.21), plus difficile sinon impossible.

Remarque 1.41 *La transformation dont il est question dans cet exemple est la représentation diffusive, qui sera présentée dans le chapitre 3 : l'opérateur \mathcal{A} n'est autre que l'opérateur de représentation diffusive \mathfrak{Rd}_γ , μ étant le γ -symbole de l'opérateur $H(\partial_t)$, qu'il caractérise entièrement.*

Construction et mise au point de schémas de résolution numérique

Bien que la construction et l'étude de schémas numériques destinés à la simulation de modèles dynamiques ne relève pas *stricto sensu* de l'automatique, cette étape peut parfois s'avérer incontournable lorsque le modèle sort du cadre standard (équations aux dérivées partielles, modèles différentiels non lipschitziens, modèles de Volterra singuliers, etc.). Ainsi par exemple, considérons un "modèle numérique" dépendant de paramètres λ à déterminer : $\tilde{\Psi}(\Delta t, \lambda, u, \tilde{x}) = 0$ destiné à *converger* vers le modèle dynamique $\Psi(u, x) = 0$, au sens où la solution numérique \tilde{x} converge vers la solution x lorsque $\Delta t \rightarrow 0$; ce problème se met sous la forme (1.16) avec :

$$\begin{cases} \Phi(\lambda, (\begin{smallmatrix} x \\ \tilde{x} \end{smallmatrix})) := \begin{pmatrix} \Psi(u, x) \\ \tilde{\Psi}(\Delta t, \lambda, u, \tilde{x}) \end{pmatrix} = 0 \\ \mathbb{P}(\lambda, x) := \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \|x - \tilde{x}\| = 0 \right]. \end{cases}$$

La résolution d'un tel problème fait l'objet du chapitre 6.

1.2.4 Transformation de problèmes dynamiques

L'objet de cette thèse est d'étudier comment transformer, au moyen d'opérateurs variés agissant (nécessairement) sur des espaces de trajectoires, un problème $(\Phi, \mathbb{P})^T = 0$ sur $\mathcal{U} \times \mathcal{X}$, en de nouveaux problèmes si possibles équivalents et *de résolution plus aisée* (cette propriété étant difficile à quantifier dans l'abstrait, mais techniquement constatable dans des situations concrètes). Abstraitement, une telle transformation sera de la forme générale :

$$\mathfrak{T} : \begin{pmatrix} u \\ x \\ \Phi \\ \mathbb{P} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{x} \\ \tilde{\Phi} \\ \tilde{\mathbb{P}} \end{pmatrix},$$

⁶Par simplicité, les variétés en jeu ne sont pas précisées car d'intérêt secondaire ici.

de telle sorte que :

$$\left(\tilde{\Phi}(\tilde{u}, \tilde{x}) \right) = 0 \Rightarrow \left(\Phi(u, x) \right) = 0.$$

Il est important de remarquer que, s'agissant d'opérations sur des espaces fonctionnels (en général de dimension infinie), la propriété de *continuité* de tous les opérateurs impliqués sera essentielle, faute de quoi les transformations pourraient, notamment, être numériquement inutilisables. Les topologies devront ainsi être ajustées de manière à assurer la continuité des opérateurs tout en étant compatibles avec la physique du problème.

Remarque 1.42 *De telles transformations pourront être intéressantes également pour l'analyse de la nature bien posée du modèle $\Phi = 0$. Bien que ce problème ne relève pas stricto sensu de l'automatique, il est cependant parfois incontournable, notamment lorsque le modèle considéré sort du cadre standard. Dans de telles situations, si pour une transformation \mathfrak{T} telle que :*

$$\tilde{\Phi}(\tilde{u}, \tilde{x}) = 0 \Rightarrow \Phi(u, x) = 0,$$

la nature bien posée (par rapport à \tilde{u}) du problème $\tilde{\Phi} = 0$ peut être établie, alors celle de $\Phi = 0$ en découle en tant qu'image par la transformation (continue) \mathfrak{T}^{-1} .

Un cas concret d'analyse de modèle grandement simplifiée grâce à des transformations opératoriels adéquates est présenté au chapitre 6.

Dans les chapitres qui suivent, on étudie quelques classes remarquables de transformations opératoriels ainsi que leurs propriétés, notamment topologiques. De telles transformations seront utilisées, dans la seconde partie, pour transformer divers problèmes dynamiques concrets de telle manière que la résolution du problème transformé soit beaucoup plus simple que celle du problème initial.

Chapitre 2

Transformations et opérateurs statiques

Sommaire

2.1	Continuité des opérateurs statiques	23
2.2	Différentiabilité des opérateurs statiques	26
2.3	Application : linéarisation d'un système dynamique explicite	28

Un des intérêts de la formulation trajectorielle des systèmes dynamiques est la variété des topologies possibles sur les espaces de trajectoires, que l'on peut adapter en fonction du problème, en vue notamment d'établir la régularité souhaitée des opérateurs en jeu. Ainsi, il est par exemple possible, à partir d'une équation avec second membre discontinu dans l'espace d'état, de récupérer une formulation avec second membre continu au sens des trajectoires, à condition que les topologies sur les espaces trajectoriels soient convenablement choisies.

On établit dans ce chapitre certains résultats de continuité et dérivabilité des opérateurs statiques pour quelques topologies usuelles. La continuité des opérateurs statiques est essentielle car elle permet d'assurer la continuité des transformations de modèles, celles-ci impliquant, dans une grande majorité de cas, de tels opérateurs.

Dans ce qui suit, \mathcal{K} est un opérateur statique t -invariant défini par une fonction $K : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ selon la relation (1.3). Le cas d'un opérateur statique non t -invariant $z \mapsto \mathcal{K}(t, z)$ défini par une fonction $K : \mathbb{R}_t \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ se traite de la même manière en considérant $x = (t, z) \in \Lambda \times \mathfrak{X}$, où $\Lambda = \{t \mapsto \lambda t, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

2.1 Continuité des opérateurs statiques

Proposition 2.1 *Si $K : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ lipschitzienne, alors \mathcal{K} est un opérateur lipschitzien de $C^0(I; \mathbf{X})$ dans $C^0(I; \mathbf{Y})$ et de $L^p(I; \mathbf{X})$ dans $L^p(I; \mathbf{Y})$, $p \in [1, +\infty]$.*

Preuve. Soient $x, y \in L^p(I; \mathbf{X})$ et $1 \leq p < \infty$. On a :

$$\|\mathcal{K}(x) - \mathcal{K}(y)\|_{L^p(I; \mathbf{Y})}^p = \int_I \|Kx(t) - Ky(t)\|_{\mathbf{Y}}^p dt \leq \int_I C^p \|x(t) - y(t)\|_{\mathbf{X}}^p dt = C^p \|x - y\|_{L^p(I; \mathbf{X})}^p.$$

La preuve est identique pour $p = +\infty$ et de $C^0(I; \mathbf{X})$ dans $C^0(I; \mathbf{Y})$, en remplaçant $\int_I \|\cdot\|^p$ par $(\text{ess})\sup_{t \in I}$. ■

Cette continuité de \mathcal{K} ne peut être obtenue qu'avec des hypothèses assez fortes sur K . Sous des hypothèses plus faibles, d'autres résultats de continuité de l'opérateur \mathcal{K} peuvent encore être établis. On utilisera à de nombreuses reprises le lemme suivant (dont la preuve est évidente) :

Lemme 2.2 *Soit $x \in L^\infty(I; \mathbf{X})$. Si $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$ dans $L^\infty(I; \mathbf{X})$, alors il existe $A \subset I$ de mesure nulle et B borné de \mathbf{X} tels que $x_n(t)$ et $x(t)$ appartiennent à B pour tout $t \in I \setminus A$.*

La proposition suivante établit la continuité de \mathcal{K} sous des hypothèses plus faibles, permettant ainsi de considérer des seconds membres non lipschitziens.

Proposition 2.3 *Si K est uniformément continue sur tout borné de \mathbf{X} , alors*

$$\mathcal{K} \in \mathcal{C}^0(L^\infty(I; \mathbf{X}); L^\infty(I; \mathbf{Y})) \cap \mathcal{C}^0(C^0(I; \mathbf{X}); C^0(I; \mathbf{Y})).$$

Preuve. Montrons la continuité de $L^\infty(I; \mathbf{X})$ dans $L^\infty(I; \mathbf{Y})$.

- $\mathcal{K}(x) \in L^\infty(I; \mathbf{Y})$. En effet, K est uniformément continue sur tout borné, donc bornée sur tout borné de \mathbf{X} , et $x(I)$ est essentiellement borné dans \mathbf{X} .
- Soit une suite x_n qui converge vers x dans $L^\infty(I; \mathbf{X})$; d'après le lemme 2.2, $\forall t \in I \setminus A_x$, $x_n(t)$ et $x(t)$ appartiennent à B_x borné de \mathbf{X} , A_x étant de mesure nulle dans I . Or K uniformément continue sur ce borné B_x , donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta_\varepsilon$ tel que

$$\text{Pour tout } y, z \in B_x, \|y - z\|_{\mathbf{X}} \leq \eta_\varepsilon \Rightarrow \|K(y) - K(z)\|_{\mathbf{Y}} \leq \varepsilon. \quad (2.1)$$

On a donc finalement :

$$\exists N_\varepsilon \text{ t.q. } n \geq N_\varepsilon \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^\infty} x \|x_n(t) - x(t)\|_{\mathbf{X}} \leq \eta_\varepsilon \text{ t-p.p. } \xRightarrow{(2.1)} \|K(x_n(t)) - K(x(t))\|_{\mathbf{Y}} \leq \varepsilon \text{ t-p.p.}$$

ce qui démontre la convergence de $\mathcal{K}(x_n)$ vers $\mathcal{K}(x)$ dans $L^\infty(I; \mathbf{Y})$.

La continuité de $C^0(I; \mathbf{X})$ dans $C^0(I; \mathbf{Y})$ s'établit de manière similaire. ■

En particulier, on a le corollaire suivant, utile lorsque $\dim(\mathbf{X}) < +\infty$.

Corollaire 2.4 *Si K continue et $\dim(\mathbf{X}) < +\infty$, alors*

$$\mathcal{K} \in \mathcal{C}^0(L^\infty(I; \mathbf{X}); L^\infty(I; \mathbf{Y})) \cap \mathcal{C}^0(C^0(I; \mathbf{X}); C^0(I; \mathbf{Y})).$$

Preuve. On se ramène à la preuve de la proposition 2.3 en remarquant que l'ensemble $\bigcup_n \{x_n(t), t \in I\}$

est un borné de \mathbf{X} ; K étant continue et $\overline{\bigcup_n x_n(I)}^{\mathbf{X}}$ étant un compact de \mathbf{X} , K est uniformément continue sur $\overline{\bigcup_n x_n(I)}^{\mathbf{X}}$ (th. de Heine). ■

Enfin, on a le résultat suivant, pour lequel l'uniforme continuité de K n'est plus supposée :

Proposition 2.5 *Si K est continue et bornée sur tout borné de \mathbf{X} , alors \mathcal{K} est un opérateur continu de $L^\infty(I; \mathbf{X})$ dans $L^p(I; \mathbf{Y})$, $1 \leq p < \infty$.*

Preuve. cf. la démonstration de la proposition 2.6. ■

Si on souhaite encore affaiblir les hypothèses sur K , pour permettre par exemple des seconds membres discontinus dans les équations (inclusions différentielles), il est nécessaire d'affaiblir les topologies sur l'espace d'arrivée : on utilise la topologie $*$ -faible de $L^\infty(I; \mathbf{Y})$. Les discontinuités de K imposent également, pour espérer la continuité de \mathcal{K} , que les trajectoires “traverseront les discontinuités de K sans y rester”, c'est-à-dire que l'ensemble des instants durant lesquels les trajectoires sont sur les discontinuités de K est de mesure nulle.

On suppose par simplicité que \mathbf{Y} est un Banach réflexif, et on note $\Sigma \subset \mathbf{X}$ l'ensemble des points de discontinuité de K .

Théorème 2.6 *Si K est presque partout continue et (essentiellement) bornée sur tout borné, alors pour toute trajectoire x_0 telle que $x_0^{-1}(\Sigma)$ est de mesure nulle et tout $p \in [1, +\infty[$,*

$$\mathcal{K} : L^\infty(I; \mathbf{X}) \rightarrow L^p(I; \mathbf{Y}) \cap L^\infty(I; \mathbf{Y})_{*-\text{faible}} \text{ est continu en } x_0.$$

Preuve. Soit $x_0 \in L^\infty(I; \mathbf{X})$; alors $\mathcal{K}(x_0) \in L^\infty(I; \mathbf{Y})$ car K essentiellement bornée sur tout borné de \mathbf{X} . Soit une suite x_n qui converge vers x_0 dans $L^\infty(I; \mathbf{X})$.

1. $\mathcal{K}x_n \xrightarrow{*} \mathcal{K}x_0$ dans $L^\infty(I; \mathbf{Y})$ si et seulement si : $\forall f \in L^1(I; \mathbf{Y}')$,

$$\langle \mathcal{K}x_n - \mathcal{K}x_0, f \rangle_{L^\infty, L^1} \rightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow \int_I \underbrace{\langle K(x_n(t)) - K(x_0(t)), f(t) \rangle_{\mathbf{Y}, \mathbf{Y}'}}_{:=g_n(t)} dt \rightarrow 0.$$

Or :

- $x_0^{-1}(\Sigma)$ est de mesure nulle dans I donc K est continue en $x_0(t)$ t -pp; on en déduit que $K(x_n(t)) - K(x_0(t)) \rightarrow 0$ t -pp, et, par continuité du produit de dualité, que $g_n(t) \rightarrow 0$ t -pp.
- On a :

$$|g_n(t)| \leq \|K(x_n(t)) - K(x_0(t))\|_{\mathbf{Y}} \|f(t)\|_{\mathbf{Y}'} \text{ } t\text{-pp.}$$

d'après le lemme 2.2, $\forall t \in I \setminus A_x$, $x_n(t)$ et $x_0(t)$ appartiennent à un borné B_{x_0} de \mathbf{X} , A_{x_0} étant de mesure nulle dans I . Ainsi :

$$|g_n(t)| \leq C \|f(t)\|_{\mathbf{Y}'} \in L^1(I, \mathbb{R}) \text{ } t\text{-pp};$$

le théorème de convergence dominée permet de conclure.

2. $\mathcal{K}x_n \rightarrow \mathcal{K}x_0$ dans $L^p(I; \mathbf{Y})$ si et seulement si :

$$\int_I \|K(x_n(t)) - K(x_0(t))\|_{\mathbf{Y}}^p dt \rightarrow 0;$$

l'utilisation du théorème de convergence dominée permet de conclure pour les mêmes raisons que précédemment.

■

Remarque 2.7 *La topologie $*$ -faible est une autre manière de mesurer “l'écart” entre deux fonctions, qui est plus faible que la topologie L^∞ ; physiquement, c'est la “bonne” topologie : elle autorise des pics d'erreurs (dus aux discontinuités de K), qui interdiraient une convergence dans L^∞ tout en permettant une convergence dans L^p (qui autorise des erreurs tendant vers 0 sous intégrale).*

Remarque 2.8 L'hypothèse $x_0^{-1}(\Sigma)$ de mesure nulle est physiquement naturelle et peu contraignante ; en effet, si une trajectoire se “bloque” sur un point de discontinuité de K , une étude particulière est souvent nécessaire et constitue un problème en soit. De plus, il est fréquent qu'un système pouvant présenter un blocage sur une singularité puisse, au moyen d'un changement de temps (cf. chapitre 4), s'exprimer de telle manière que les trajectoire \widetilde{x}_0 dans cette nouvelle horloge soient telles que $\widetilde{x}_0^{-1}(\Sigma)$ soit, cette fois, de mesure nulle. Ceci est illustré dans le chapitre 5 avec l'exemple du pendule avec frottement secs.

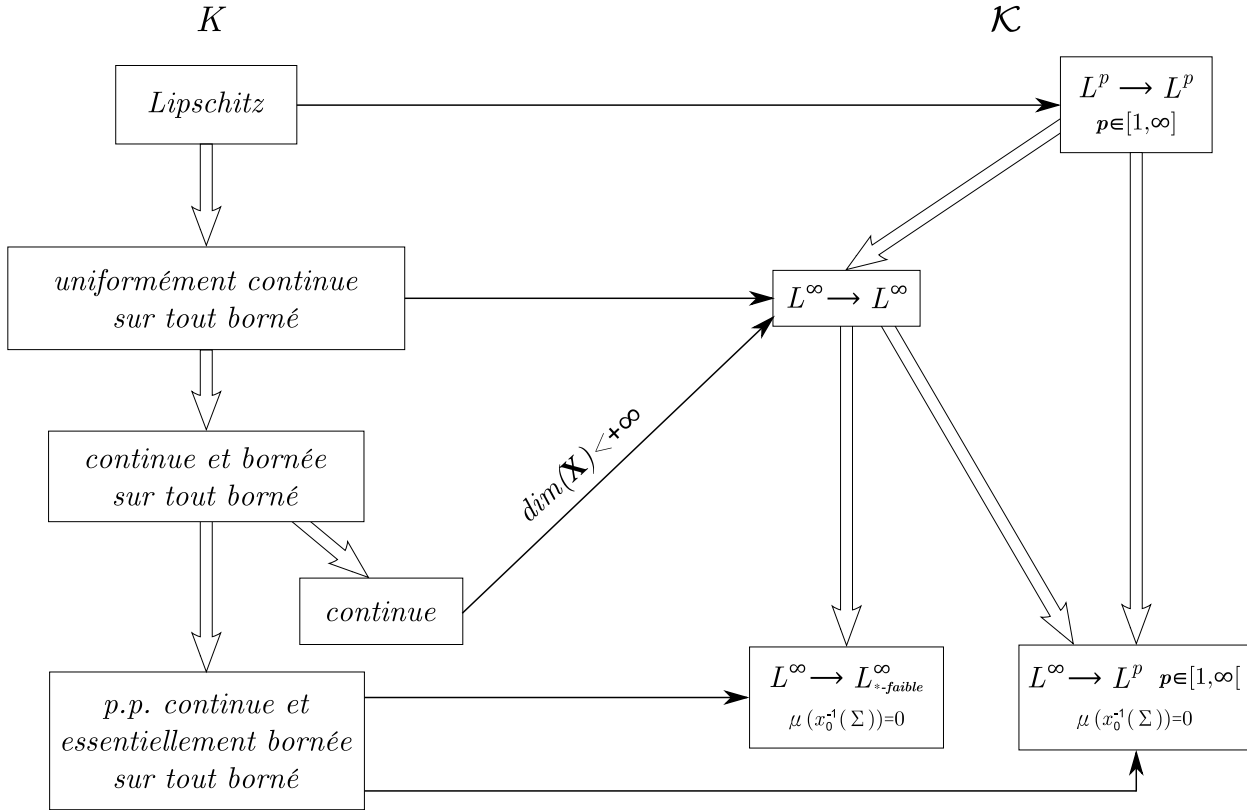


FIG. 2.1 – Diagramme récapitulatif des résultats de continuité d'un opérateur statique.

Remarque 2.9 Ce diagramme n'est pas exhaustif : en pratique, il faudra parfois établir spécifiquement la continuité en adaptant les topologies en fonction du problème rencontré.

2.2 Différentiabilité des opérateurs statiques

Au-delà de la continuité, la propriété de différentiabilité permet d'envisager notamment la linéarisation, c'est-à-dire l'approximation d'un modèle par le modèle linéaire tangent, plus simple à maîtriser. Il s'agit donc d'une propriété intéressante, qui, comme la continuité, sera fortement conditionnée par le choix des topologies.

On note D_h l'opérateur de dérivation au sens de Gâteaux.

Proposition 2.10 *Si $K : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ est Fréchet-différentiable et à dérivée bornée, alors \mathcal{K} est Gâteaux-différentiable de $L^\infty(I; \mathbf{X})$ dans $L^p(I; \mathbf{Y})$, $p \in [1, +\infty]$, et on a :*

$$(D_h \mathcal{K})(x) : h \mapsto (K' \circ x) \cdot h$$

Preuve. Par définition, on a pour tout $h \in L^\infty(I; \mathbf{X})$:

$$(D_h \mathcal{K})(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} (\mathcal{K}(x + \lambda h) - \mathcal{K}(x)).$$

Comme K est Fréchet-différentiable, on a pour tout t :

$$[\mathcal{K}(x + \lambda h)](t) - [\mathcal{K}(x)](t) = K(x(t) + \lambda h(t)) - K(x(t)) = \lambda K'(x(t)) \cdot h(t) + o(\lambda h(t)).$$

On note $L_x : h \mapsto (K' \circ x) \cdot h$ l'application (linéaire) candidate à la Gâteaux-différentielle de \mathcal{K} .

– Continuité de L_x de $L^\infty(I; \mathbf{X})$ dans $L^\infty(I; \mathbf{Y})$:

$$\begin{aligned} \|L_x \cdot h\|_{L^\infty(I; \mathbf{Y})} &= \operatorname{ess\,sup}_{t \in I} \|K'(x(t)) \cdot h(t)\|_{\mathbf{Y}} \leq \operatorname{ess\,sup}_{t \in I} \|K'(x(t))\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}; \mathbf{Y})} \|h(t)\|_{\mathbf{X}} \\ &\leq M \|h\|_{L^\infty(I; \mathbf{X})}. \end{aligned}$$

la continuité de $L^\infty(I; \mathbf{X})$ dans $L^p(I; \mathbf{Y})$ en découle.

– On a de plus la majoration uniforme :

$$\begin{aligned} t\text{-pp}, \left\| \frac{1}{\lambda} [\mathcal{K}(x + \lambda h) - \mathcal{K}(x) - L_x \cdot h](t) \right\|_{\mathbf{Y}} &= o(\lambda \|h(t)\|_{\mathbf{Y}}) \\ &\leq \|h\|_{L^\infty(I; \mathbf{X})} o(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

qui permet d'écrire :

$$\frac{1}{\lambda} (\mathcal{K}(x + \lambda h) - \mathcal{K}(x) - L_x \cdot h) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0 \text{ dans } L^\infty(I; \mathbf{Y}).$$

On montre de même que :

$$\frac{1}{\lambda} (\mathcal{K}(x + \lambda h) - \mathcal{K}(x) - L_x \cdot h) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0 \text{ dans } L^p(I; \mathbf{Y}),$$

en appliquant le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions :

$$g_n(t) := \left\| \frac{K(x(t) + \lambda_n h(t)) - K(x(t))}{\lambda_n} - K'(x(t)) \cdot h(t) \right\|_{\mathbf{Y}},$$

qui converge simplement vers 0 et qui est bornée t -pp (donc appartient à $L^p(I; \mathbf{Y})$).

■

Proposition 2.11 *Si K est deux fois Fréchet-différentiable et à dérivée seconde bornée, alors \mathcal{K} est Fréchet-différentiable de $L^\infty(I; \mathbf{X})$ dans $L^p(I; \mathbf{Y})$, $1 \leq p \leq \infty$ et on a :*

$$\mathcal{K}'(x) : h \mapsto (K' \circ x) \cdot h$$

Preuve. Soit $C \in \mathbb{R}^{+*}$ un majorant de $\|K''\|$. Le théorème de Taylor-Lagrange permet d'établir la majoration uniforme :

$$\|K(x(t) + \lambda h(t)) - K(x(t)) - K'(x(t)).h(t)\|_{\mathbf{Y}} \leq C \frac{\|h(t)\|_{\mathbf{X}}}{2} \leq C_2 \|h\|_{L^\infty} \xrightarrow{\|h\|_{L^\infty} \rightarrow 0} 0,$$

qui permet d'établir la différentiabilité forte de \mathcal{K} . ■

En conséquence immédiate des propositions précédentes, on peut écrire le développement suivant d'un opérateur statique.

Corollaire 2.12 *Soit $x_0 \in L^\infty(I; \mathbf{X})$. Si K est deux fois différentiable et à dérivée seconde bornée, alors, pour tout $x \in L^\infty(I; \mathbf{X})$:*

$$\mathcal{K}(x) = \mathcal{K}(x_0) + (K' \circ x_0).(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Ce résultat sera notamment utilisé dans la section suivante.

Remarque 2.13 *Désormais, on assimilera un opérateur statique à la fonction K qui le représente.*

2.3 Application : linéarisation d'un système dynamique explicite

Soient \mathcal{U}, \mathcal{X} des variétés d'espaces de Banach \mathcal{U}, \mathcal{X} de fonctions de $[0, T]$ dans \mathbf{U}, \mathbf{X} . On considère le modèle dynamique explicite :

$$H(\partial_t)x = f(u, x), \quad (2.2)$$

les espaces \mathcal{U}, \mathcal{X} étant tels que l'opérateur f soit \mathcal{C}^1 . On se propose de linéariser ce système dynamique, c'est-à-dire linéariser l'opérateur statique f autour d'un couple (u_0, x_0) solution.

En utilisant le corollaire (2.12), et en posant $\delta u = u - u_0$ et $\delta x = x - x_0$, on déduit :

$$H(\partial_t)x = f(u_0, x_0) + f'(u_0, x_0).(\delta u, \delta x) + o(\delta u, \delta x).$$

En remarquant que $H(\partial_t)x_0 = f(u_0, x_0)$, on obtient donc le système (linéaire si on néglige les termes d'ordre supérieur à 1) :

$$H(\partial_t)\delta x = A\delta x + B\delta u + o(\delta u, \delta x), \quad (2.3)$$

avec $A := \partial_x f(u_0, x_0)$ et $B := \partial_u f(u_0, x_0)$.

Remarque 2.14 *Il faut, évidemment, connaître un couple (u_0, x_0) solution pour linéariser le système dynamique ; concrètement, on peut soit le connaître analytiquement, soit plus généralement le construire numériquement en résolvant (en x) l'équation 2.2.*

La possibilité de linéariser un système autour d'une trajectoire solution est une propriété intéressante. En effet, on est alors assuré d'avoir accès, via un système linéaire (à coefficients en général variables) et dans un voisinage de la trajectoire u_0 , à des trajectoires solution *proches* (au sens des topologies en jeu) de x_0 , et qui restitueront donc les comportements du système initial. Cette propriété pourra être en particulier utile par exemple pour la construction d'un feedback stabilisant autour d'une trajectoire x_0 associée à une commande u_0 préalablement déterminée en boucle ouverte (planification de trajectoire).

Dans le cas $H(\partial_t) = \partial_t$, l'équation 2.2 se ramène à un problème de Cauchy¹ :

$$\partial_t x = f(u, x), \quad (2.4)$$

dont la solution est exprimée par $x = \mathbf{F}(u)$. La relation (2.3) permet alors d'expliciter, de manière relativement simple, l'opérateur linéaire $\mathbf{F}'(u_0)$; dont fait l'objet la proposition suivante.

Proposition 2.15 *On suppose que $f \in C^1(\mathbf{U} \times \mathbf{X}; \mathbf{X})$ et que $(u_0, x_0) \in C^0([0, T]; \mathbf{U}) \times C^0([0, T]; \mathbf{X})$ est un couple solution de (2.4). Si \mathbf{F} est différentiable en u_0 , alors :*

$$\mathbf{F}'(u_0) : h \mapsto \int_0^\cdot R(\cdot, \tau) B(\tau) h(\tau) d\tau, \quad (2.5)$$

où $R(t, \tau)$ est le noyau résolvant [8] de l'équation différentielle linéaire $\partial_t z = A z$ et :

$$A := \partial_x f(u_0, x_0), \quad B := \partial_u f(u_0, x_0).$$

Preuve. L'opérateur \mathbf{F} étant différentiable en u_0 , on a pour tout u ,

$$\mathbf{F}(u) = \mathbf{F}(u_0) + \mathbf{F}'(u_0) \cdot (u - u_0) + o(u - u_0),$$

soit, en notant $\delta u = u - u_0$ et $\delta x = x - x_0$:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \mathbf{F}'(u_0) \delta u + o(\delta u) \\ \Leftrightarrow \delta x &= \mathbf{F}'(u_0) \delta u + o(\delta u). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Par ailleurs, la relation (2.3) s'écrit :

$$\partial_t \delta x = A \delta x + b \quad (2.7)$$

avec $b := B \delta u + o(\delta u, \delta x)$; L'opérateur A est continu car composition d'applications continues, et la fonction b l'est également; la solution de (2.7) s'écrit donc [8] :

$$\begin{aligned} \delta x &= \int_0^\cdot R(\cdot, \tau) b(\tau) d\tau \\ &= \int_0^\cdot R(\cdot, \tau) B(\tau) \delta u(\tau) d\tau + \int_0^\cdot R(\cdot, \tau) o(\delta u, \delta x)(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Montrons que $\int_0^\cdot R(\cdot, \tau) o(\delta u, \delta x)(\tau) d\tau = o(\delta u)$: pour tout $(t, t_0) \in [0, T]^2$, on a :

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t R(t_0, \tau) o(\delta u, \delta x)(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{X}} &\leq \int_0^t \|R(t_0, \tau) o(\delta u, \delta x)(\tau)\|_{\mathbf{X}} d\tau \\ &\leq \int_0^t \|R(t_0, \tau)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} \|o(\delta u, \delta x)(\tau)\|_{\mathbf{X}} d\tau \\ &\leq \int_0^t k \|o(\delta u, \delta x)(\tau)\|_{\mathbf{X}} d\tau \text{ car } R \text{ bornée (continue sur } [0, T]^2). \end{aligned}$$

En particulier, pour $t_0 = t$, on déduit la majoration (uniforme en t) :

$$\left\| \int_0^t R(t, \tau) o(\delta u, \delta x)(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \leq k \int_0^t \|o(\delta u, \delta x)\|_{C^0(I; \mathbf{X})} d\tau \leq kT \|o(\delta u, \delta x)\|_{C^0(I; \mathbf{X})},$$

¹La condition initiale est ici implicitement prise en compte dans le choix de la variété $\mathcal{X} = \{x \in C^1([0, T]; \mathbf{X}); x(0) = x_0\}$.

et donc que :

$$\int_0^\cdot R(\cdot, \tau) o(\delta u, \delta x)(\tau) d\tau = o(\delta u, \delta x).$$

Par ailleurs, l'équation (2.6) montre que $\delta x = O(\delta u)$, dont on déduit finalement

$$o(\delta u, \delta x) = o(\delta u),$$

ce qui montre le résultat attendu par identification des termes d'ordre 1 entre (2.8) et (2.6). ■

Les relations (2.3) et (2.6) permettent entre autres d'interpréter la linéarisation trajectorielle d'un système dynamique comme l'approximation du graphe de \mathbf{F} par sa tangente en (u_0, x_0) (cf. Figure 2.2).

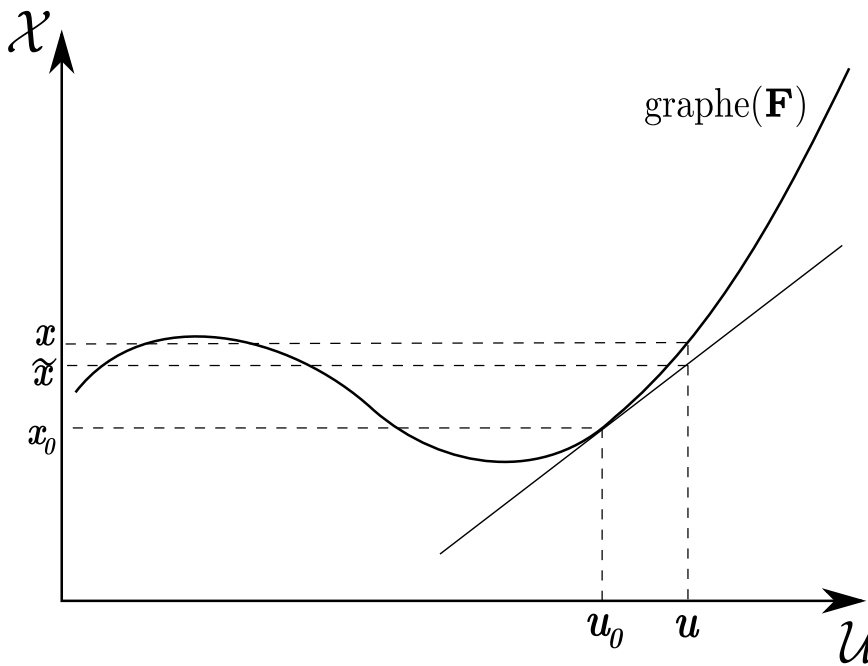


FIG. 2.2 – Représentation de la linéarisation trajectorielle d'un système dynamique.

Remarque 2.16 On ne saurait envisager de déduire de (2.5) une expression de l'opérateur $\mathbf{F} : u \mapsto x$, l'intégration d'une telle équation fonctionnelle étant en général hors de portée. On peut cependant en déduire une expression de l'opérateur \mathbf{F} au premier ordre :

$$(\mathbf{F}(u))(t) = x_0(t) + \int_0^t R(t, \tau) B(\tau) (u - u_0)(\tau) d\tau + (o(\delta u))(t), \quad (2.9)$$

ce qui constitue un résultat pouvant se révéler utile pour résoudre $\Phi = 0$ de manière approchée par simple évaluation de (2.9).

Remarque 2.17 La linéarisation classique d'une équation différentielle, lorsqu'elle est faite "autour d'un point d'équilibre" est un cas particulier de la linéarisation présentée ci-dessus, où la trajectoire (u_0, x_0) est une solution constante par rapport à t .

Une telle linéarisation devient illicite lorsqu'elle est effectuée autour d'un point $(u_0, x_0) \in \mathbf{U} \times \mathbf{X}$ de l'espace d'état si ce point n'est pas un point d'équilibre, la fonction f étant alors considérée

indépendamment de ses conséquences dynamiques. De fait, cette notion insuffisante de linéarisation ne peut en général rester valide qu'au voisinage du point de référence (u_0, x_0) choisi dans l'espace d'état.

Chapitre 3

Transformation par représentation diffusive

Sommaire

3.1	Principe général	33
3.2	Terminologie	36
3.3	Espaces vectoriels topologiques adaptés à la représentation diffusive	36
3.4	Extension vectorielle	37
3.4.1	Représentation diffusive d'une fonction u à valeurs vectorielles	37
3.4.2	Symbole diffusif d'un opérateur agissant sur des fonctions à valeurs vectorielles	37
3.5	Transformations diffuses de modèles non locaux	39

La transformation dénommée *représentation diffusive*, décrite dans [35], permet la formulation d'une large classe d'opérateurs linéaires dynamiques $H(t, \partial_t)$ au moyen de réalisations locales diffuses. Dans le contexte des transformations opératoriels de problèmes dynamiques, la représentation diffusive occupe ainsi une place importante puisqu'elle va permettre notamment d'étendre au cas de modèles non locaux la plupart des propriétés des modèles différentiels, moyennant une augmentation d'état. Au plan numérique, la nature diffusive de ces réalisations autorise par ailleurs des approximations à la fois précises et peu coûteuses (en termes de temps de calcul et de mémoire).

L'essentiel de la représentation diffusive est résumé dans les paragraphes qui suivent. Davantage de détails et diverses extensions pourront être trouvés dans [9], [35], et les références citées dans ces documents.

3.1 Principe général

On considère un opérateur linéaire intégral causal $\mathcal{H} = H(t, \partial_t) \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}_t))$ de noyau $\mathbf{h}(t, s)$ et de "réponse impulsionnelle" h définie par $h(t, s) := \mathbf{h}(t, t - s)$, avec $h(t, \cdot)$ supposée localement intégrable pour tout t . L'opérateur \mathcal{H} étant causal, on a : $h(t, s) = 0, \forall s < 0$. En introduisant la fonction *histoire* de u , définie par $u(t) \mapsto \mathbf{u}(t, s) = \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(s) u(t - s)$, on a :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \int_{\mathbb{R}^+} \mathbf{h}(t, s) u(s) ds = \int_{\mathbb{R}} h(t, s) \mathbf{u}(t, s) ds.$$

Avec la notation $\langle f, g \rangle := \int f(s) g(s) ds$, on obtient alors l'expression :

$$\forall t, \quad (\mathcal{H}u)(t) = \langle h(t, \cdot), \mathbf{u}(t, \cdot) \rangle, \quad (3.1)$$

c'est-à-dire : le résultat de l'opérateur \mathcal{H} sur une fonction u s'exprime par le *produit* (au sens du crochet $\langle \cdot, \cdot \rangle$) de la *réponse impulsionnelle* de \mathcal{H} et de l'*histoire* de u .

On notera d'une part que le produit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est indépendant de t (au sens où le domaine parcouru par s l'est), d'autre part qu'à chaque t (fixé), $h(t, \cdot)$ et $\mathbf{u}(t, \cdot)$ sont des fonctions d'une variable temps $s \in \mathbb{R}$.

Pour toute transformation linéaire inversible \mathcal{A} agissant sur \mathbf{u} , on a alors, par transposition formelle dans l'expression $\langle h(t, \cdot), \mathcal{A}^{-1} \mathcal{A} \mathbf{u}(t, \cdot) \rangle : (\mathcal{H}u)(t) = \langle (\mathcal{A}^{-1})^* h(t, \cdot), \mathcal{A} \mathbf{u}(t, \cdot) \rangle$, expression que l'on écrit :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \langle \mu(t, \cdot), \psi(t, \cdot) \rangle \quad (3.2)$$

avec $\psi(t, \cdot) := (\mathcal{A} \mathbf{u}(t, \cdot))$ et $\mu(t, \cdot) := (\mathcal{A}^*)^{-1} h(t, \cdot)$. On a ainsi accès à de nouvelles formulations de l'opérateur \mathcal{H} . La représentation diffusive constitue une famille de telles transformations présentant des propriétés utiles tant pour l'analyse que pour la réalisation numérique de \mathcal{H} .

Considérons pour cela l'opérateur linéaire $(\partial_t - pI)$, $p \in \mathbb{C}^-$, où I désigne l'opérateur identité. On peut montrer que cet opérateur admet un inverse dans l'algèbre $\mathcal{L}_+(L^2(\mathbb{R}))$ des opérateurs linéaires continus et causaux dans $L^2(\mathbb{R})$ si $\text{Re}(p) < 0$ [48] (p. 241). On introduit alors la définition :

Définition 3.1 On appelle *opérateur de représentation diffusive*, noté \mathfrak{Rd} , la *fonction opératoirelle* :

$$\begin{aligned} \mathfrak{Rd} : \quad \mathbb{C}^- &\longrightarrow \mathcal{L}_+(L^2(\mathbb{R})) \\ p &\longmapsto \mathfrak{Rd}_p = (\partial_t - pI)^{-1} \end{aligned} \quad (3.3)$$

En notant $\Psi(t, \cdot)$ la *représentation diffusive* de u , c'est à dire $\Psi(t, p) = (\mathfrak{Rd}_p u)(t)$, il découle de la définition précédente que $\Psi(\cdot, p)$ est l'unique solution de l'équation différentielle dans $L^2(\mathbb{R}_t)$:

$$\partial_t \Psi(t, p) = p \Psi(t, p) + u(t), \quad p \in \mathbb{R}_t^{*-} \times i\mathbb{R}. \quad (3.4)$$

La fonction Ψ étant solution d'une équation différentielle, elle pourra, dans le cas où u est à support¹ dans \mathbb{R}^+ , être obtenue (éventuellement numériquement) par intégration de cette équation à partir de la condition initiale $\Psi(0, p) = 0$.

Soit maintenant $\gamma \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R}_\xi; \mathbb{C})$ définissant dans \mathbb{C}^- un arc simple fermé à l'infini, séparant \mathbb{C} en deux domaines ouverts connexes disjoints² notés Ω_γ^+ et Ω_γ^- ; pour des raisons non décrites ici, on suppose en outre vérifiées les hypothèses suivantes (voir Figure 3.1) :

$$\bullet \quad \exists \alpha_\gamma \in]\frac{\pi}{2}, \pi[, \exists a \in \mathbb{R} \text{ tels que } e^{i[-\alpha_\gamma, \alpha_\gamma]} \mathbb{R}_+ + a \subset \Omega_\gamma^+, \quad (3.5)$$

$$\bullet \quad \mathbb{R}_+^* + i\mathbb{R} \subset \Omega_\gamma^+, \quad (3.6)$$

$$\bullet \quad \gamma(\mathbb{R}) \cap i\mathbb{R} \text{ de mesure nulle,} \quad (3.7)$$

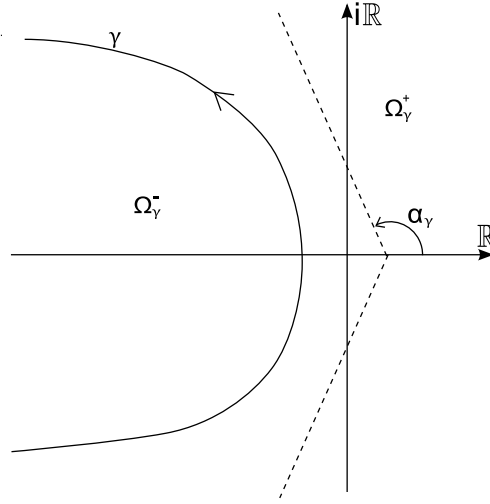
$$\bullet \quad \exists a, b \in \mathbb{R}^{+*}, \quad a \leq |\gamma'(\xi)| \leq b \quad \xi\text{-pp.} \quad (3.8)$$

De ce qui précède, on déduit que pour tout $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$, $\mathfrak{Rd}_\gamma u$ est l'unique solution du problème de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}_\xi)$:

$$\partial_t \psi(t, \xi) = \gamma(\xi) \psi(t, \xi) + u(t), \quad \psi(0, \xi) = 0. \quad (3.9)$$

¹Où plus généralement lorsque u est à support minoré par t_0 , auquel cas la condition initiale porte sur l'instant t_0 .

²L'arc γ peut être dégénéré, en particulier, Ω_γ^- peut être vide.

FIG. 3.1 – Exemple de contour γ .

Par la condition sectorielle (3.5) imposée à γ , cette équation est dite de type diffusif, le semi-groupe engendré par l'opérateur $\psi \mapsto \gamma \psi$ étant analytique [35] (p. 34), [48] (p. 256). Cette propriété signifie que le comportement à haute fréquence (lorsque $\xi \rightarrow \infty$) de $\psi(t, \cdot)$ est très régulier, ce qui entraîne que des approximations peu coûteuses de l'équation d'état (3.9) pourront être construites. En effet, la discrétisation en ξ de γ pourra être d'autant moins fine que le contour s'éloignera de l'axe imaginaire pur : quelques dizaines de points de discrétisation en ξ seront en pratique suffisants.

Enfin, en utilisant la formule de Duhamel sur (3.4), on peut montrer que :

$$(\mathfrak{R}d_{\gamma(\xi)}u)(t) = \int_0^{+\infty} e^{\gamma(\xi)s} \mathbf{u}(t, s) ds \quad \xi\text{-pp.} ;$$

ainsi, avec $\mathcal{A} : \mathbf{u}(t, \cdot) \mapsto \int_0^{+\infty} e^{\gamma(\cdot)s} \mathbf{u}(t, s) ds$, on déduit de (3.2) :

$$(\mathcal{H}u)(t) = \langle \mu(t, \cdot), (\mathfrak{R}d_{\gamma}u)(t) \rangle = \langle \mu(t, \cdot), \psi_u(t, \cdot) \rangle \quad (3.10)$$

où ψ_u est solution de l'équation (3.9). En conclusion, sur les fonctions u à support dans \mathbb{R}^+ , l'opérateur \mathcal{H} est réalisé localement par le système entrée-sortie :

$$y = \mathcal{H}u \Leftarrow \begin{cases} \partial_t \psi(t, \xi) = \gamma(\xi) \psi(t, \xi) + u(t), & \psi(0, \xi) = 0, \quad t > 0 \\ y(t) = \langle \mu(t, \cdot), \psi(t, \cdot) \rangle. \end{cases} \quad (3.11)$$

Remarque 3.2 Le contour γ n'étant pas unique, l'équivalence ne peut avoir lieu qu'en précisant le choix de γ . On a en fait la propriété plus précise (cf. section 3.2 pour la définition de l'opérateur $\mathfrak{S}d_{\gamma}$) :

$$\forall u \in L_{\text{loc}}^{\infty}(\mathbb{R}^+)$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \mathcal{H}u \\ \psi = \mathfrak{R}d_{\gamma}u \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \begin{cases} \partial_t \psi = \gamma \psi + u, & \psi(0, \cdot) = 0. \\ y = \langle \mathfrak{S}d_{\gamma} \mathcal{H}, \psi \rangle. \end{cases}$$

3.2 Terminologie

- Un opérateur $\mathcal{H} = H(t, \partial_t)$ tel que, pour toute u à support dans \mathbb{R}^+ , il existe μ tel que :

$$\mathcal{H}u = \langle \mu, \mathfrak{Rd}_\gamma u \rangle, \quad (3.12)$$

est dit γ -réalisable, l'expression (3.12) étant appelée γ -réalisation de $\mathcal{H}u$;

- la fonction $\psi = \mathfrak{Rd}_\gamma u$ est appelée γ -représentation (diffusive) de u ;
 ► tout μ permettant de réaliser l'opérateur \mathcal{H} sous la forme (3.12) est appelée γ -symbole (diffusif) de \mathcal{H} ;
 ► enfin, un opérateur \mathcal{H} est dit γ -diffusif s'il admet un γ -symbole avec γ vérifiant (3.5), (3.6) et (3.7).

On peut montrer que, lorsqu'il existe, le γ -symbole n'est pas unique : l'ensemble des μ comme définis précédemment est une classe d'équivalence, associée à l'opérateur \mathcal{H} ; c'est la classe formellement définie par $(\mathcal{A}^{-1})^* h$. En notant \mathfrak{Sd}_γ l'opérateur $\mathcal{H} \mapsto \boldsymbol{\mu} = (\mathcal{A}^{-1})^* h = \{\mu \text{ satisfaisant (3.12)}\}$, la classe associée à un opérateur diffusif \mathcal{H} pour γ donnée s'écrit $\boldsymbol{\mu} = \mathfrak{Sd}_\gamma \mathcal{H}$, et on obtient ainsi l'écriture synthétique :

$$\mathcal{H}u = \langle \mathfrak{Sd}_\gamma \mathcal{H}, \mathfrak{Rd}_\gamma u \rangle .$$

Theorème 3.3 *Un opérateur $H(t, \partial_t)$ est γ -diffusif si et seulement si le symbole $H(t, \cdot)$ est pour tout t analytique dans Ω_γ^+ et $H(t, p) \xrightarrow{|p| \rightarrow \infty} 0$ dans tout secteur fermé ne rencontrant pas $\Omega_\gamma^- \cup \gamma(\mathbb{R})$.*

Enfin, pour tout opérateur $H(t, \partial_t)$ γ -diffusif, il existe un γ -symbole $\mu \in \boldsymbol{\mu}$ dit *canonique*, défini, lorsque $\gamma \in C^\infty$, à partir du symbole $H(t, p)$ par [9] :

$$\mu(t, \cdot) = \lim_{\substack{\gamma_n \xrightarrow{C^\infty} \gamma \\ \gamma_n(\mathbb{R}) \subset \Omega_\gamma^-}} \frac{\gamma'_n}{2i\pi} H(t, \gamma_n) \quad \text{dans } \mathcal{D}' ;$$

dans le cas où $H(t, \cdot)$ est analytique sur $\gamma(\mathbb{R})$, μ est une fonction : $\mu(t, \xi) = \frac{\gamma'(\xi)}{2i\pi} H(t, \gamma(\xi))$.

Dans le cas général $\gamma \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}$, le γ -symbole canonique n'est en général pas une distribution au sens ordinaire ; sa définition nécessite quelques subtilités techniques supplémentaires non décrites ici.

Exemple 3.4 *Pour $\gamma(\xi) = -|\xi|$:*

- l'opérateur $\partial_t^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, admet pour γ -symbole canonique $\mu(\xi) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{2\pi|\xi|^\alpha} \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_\xi)$.
 ► l'opérateur "intégrateur" ∂_t^{-1} admet pour γ -symbole canonique $\mu = \delta$ (masse de Dirac en 0).

De nombreux autres exemples de γ -symboles (réguliers ou singuliers) pourront être trouvés dans [35], [9].

3.3 Espaces vectoriels topologiques adaptés à la représentation diffusive

Le cadre mathématique adapté à la représentation diffusive a été construit et étudié en détail dans [35]. On résume ci-après les principaux résultats utiles dans le cadre de cette thèse.

Afin de donner un sens rigoureux et aussi général que possible à l'expression $\langle \mu, \mathfrak{Rd}_\gamma u \rangle$, un espace de base Δ_γ a été introduit, cet espace étant tel que pour toute fonction $u \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_t^+)$,

$\psi(t, \cdot) = (\mathfrak{Rd}_\gamma u)(t) \in \Delta_\gamma$. Du point de vue topologique, Δ_γ est une limite inductive stricte d'espaces de Fréchet. Son dual topologique Δ'_γ est défini comme l'espace maximal des γ -symboles³.

La structure vectorielle de Δ'_γ a pour conséquence des propriétés particulièrement intéressantes, à savoir tout d'abord que si \mathcal{H}, \mathcal{K} sont deux opérateurs admettant des γ -symboles respectifs μ, ν alors l'opérateur $\mathcal{H} + \mathcal{K}$ admet pour γ -symbole $\mu + \nu$, c'est-à-dire admet une réalisation locale définie par la même équation (3.9).

Par ailleurs, l'espace Δ'_γ est muni d'un produit interne, noté $\#_\gamma$, associé au produit de composition des opérateurs ; c'est-à-dire : $\mathcal{H} \circ \mathcal{K}$ admet pour γ -symbole $\mu \#_\gamma \nu$, c'est-à-dire admet une réalisation locale définie à nouveau par l'équation (3.9). En outre, il a été établi que le produit $\#_\gamma$ est continu dans Δ'_γ , cet espace étant pour cette raison dénommé *algèbre (topologique) des γ -symboles*.

La topologie de l'espace Δ'_γ n'est pas métrique. Cependant, des espaces de Banach (voire de Hilbert) intermédiaires, de type Sobolev, ont été introduits :

$$\Delta_\gamma \hookrightarrow W_\gamma^{n,p}, \quad W_\gamma^{n,p'} \hookrightarrow \Delta'_\gamma,$$

donc vérifiant $|\langle \mu, \psi \rangle_{W_\gamma^{n,p'}, W_\gamma^{n,p}}| \leq \|\mu\|_{W_\gamma^{n,p'}} \|\psi\|_{W_\gamma^{n,p}}$, de sorte qu'il est en général possible, étant donné un problème particulier, de choisir deux espaces de Banach en dualité adaptés à la situation considérée.

Par simplicité, on désignera dans la suite par W_γ un espace de Sobolev $W_\gamma^{n,p}$.

3.4 Extension vectorielle

3.4.1 Représentation diffusive d'une fonction u à valeurs vectorielles

L'extension de la représentation diffusive aux fonctions $u : \mathbb{R}_t^+ \rightarrow \mathbf{U}$ espace de Banach se fait de manière naturelle. Dans le cas général $u \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_t^+; \mathbf{U})$, pour tout espace de Sobolev W_γ tel que $\Delta_\gamma \hookrightarrow W_\gamma$, on définit de même $\mathfrak{Rd}_\gamma u \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_t^+; W_\gamma(\mathbb{R}_\xi; \mathbf{U}))$ comme solution de $\partial_t \psi = \gamma \psi + u$, $\psi(0, \cdot) = 0$ (avec $\psi(t, \xi) \in \mathbf{U}$ (t, ξ)-pp).

Dans le cas plus simple $\mathbf{U} = \mathbb{R}^m$, $\mathfrak{Rd}_\gamma u := (\mathfrak{Rd}_\gamma u_j) \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_t^+; W_\gamma(\mathbb{R}_\xi; \mathbb{R}^m)) \sim L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_t^+; W_\gamma^m)$; en notant $\psi = (\psi_j)$, $\mathfrak{Rd}_\gamma u$ est solution de : $\partial_t \psi = \gamma \psi + u$, $\psi(0, \cdot) = 0$.

3.4.2 Symbole diffusif d'un opérateur agissant sur des fonctions à valeurs vectorielles

Cas d'opérateurs matriciels invariants

Soit \mathcal{H} un opérateur matriciel invariant de taille $n \times m$, dont on note \mathcal{H}_i^j , $i = 1 : n, j = 1 : m$, les composantes "scalaires". On a alors :

$$(\mathcal{H}u)_i = \sum_j \mathcal{H}_i^j u_j. \quad (3.13)$$

On suppose que chacun des opérateurs scalaires \mathcal{H}_i^j est γ -diffusif, et on note μ_i^j son γ -symbole dans Δ'_γ . Sous cette hypothèse, l'opérateur matriciel \mathcal{H} est dit lui-même γ -diffusif, et la matrice des γ -symboles μ_i^j , notée μ , est appelée γ -symbole de \mathcal{H} .

On définit l'espace $\Delta_\gamma^{n \times m}$ des γ -symboles matriciels de taille $n \times m$:

$$\Delta_\gamma^{n \times m} := \left\{ \mu = (\mu_i^j)_{i=1:n, j=1:m} \text{ tel que } \mu_i^j \in \Delta'_\gamma \right\}, \quad (3.14)$$

³Dans le cas où γ est régulière, Δ'_γ s'identifie à un espace quotient d'ultra-distributions [35].

et plus généralement, pour tout espace de Sobolev $W'_\gamma \hookrightarrow \Delta'_\gamma$:

$$W_\gamma^{m \times n} := \left\{ \mu = (\mu_i^j)_{i=1:n, j=1:m} \text{ tel que } \mu_i^j \in W'_\gamma \right\}.$$

On a alors, pour tout opérateur matriciel \mathcal{H} de taille $n \times m$, γ -diffusif et de γ -symbole $\mu \in \Delta_\gamma^{n \times m}$:

$$\forall i, (\mathcal{H}u)_i := \sum_j \mathcal{H}_i^j u_j = \sum_j \langle \mu_i^j, \psi_{u_j} \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma}. \quad (3.15)$$

En notant : $(\mu \cdot \psi)_i = \sum_j \langle \mu_i^j, \psi_j \rangle_{\Delta'_\gamma, \Delta_\gamma}$, on écrira de manière synthétique :

$$\mathcal{H}u = \mu \cdot \psi. \quad (3.16)$$

Cas général

L'extension au cadre général des espaces de Banach nécessite quelques subtilités techniques non approfondies ici. On présente simplement le principe d'une telle extension, de manière suffisante pour la suite de l'exposé. Dans la suite, \mathbf{U} et \mathbf{Y} désignent des espaces de Banach réflexifs.

Définition 3.5 Soit $\mathcal{H} \in \mathcal{L}(L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_t^+; \mathbf{U}); L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_t^+; \mathbf{Y}))$ un opérateur intégral causal t -invariant. Cet opérateur est dit γ -diffusif à γ -symbole non singulier s'il existe γ tel que :

$$\exists \mu \in C^0(\mathbb{R}_\xi; \mathcal{L}(\mathbf{U}; \mathbf{Y})), \quad \forall u \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_t^+; \mathbf{U}), \quad (\mathcal{H}u)(t) = \int \mu(\xi) [(\mathfrak{Rd}_\gamma u)(t, \xi)] d\xi \quad \forall t.$$

Définition 3.6 Un opérateur intégral causal t -invariant $\mathcal{H} \in \mathcal{L}(L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_t^+; \mathbf{U}); L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_t^+; \mathbf{Y}))$ est dit γ -diffusif s'il existe γ et W_γ tels que :

$$\exists \mu \in \mathcal{L}(W_\gamma(\mathbb{R}_\xi; \mathbf{U}); \mathbf{Y}), \quad \forall u \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_t^+; \mathbf{U}), \quad (\mathcal{H}u)(t) = \mu \cdot [(\mathfrak{Rd}_\gamma u)(t)] \quad \forall t.$$

Tout γ -symbole pouvant être approché par un γ -symbole continu, on pourra encore écrire, par continuité-densité et de façon abusive : $\mu \cdot [(\mathfrak{Rd}_\gamma u)(t)] = \int \mu(\xi) [(\mathfrak{Rd}_\gamma u)(t, \xi)] d\xi$. On peut de même identifier $\mathcal{L}(W_\gamma(\mathbb{R}_\xi; \mathbf{U}); \mathbf{Y})$ à l'espace $W'_\gamma(\mathbb{R}_\xi; \mathcal{L}(\mathbf{U}; \mathbf{Y}))$. Enfin, la façon la plus générale de définir un opérateur diffusif est la suivante.

Définition 3.7 Soit $\mathcal{H} \in \mathcal{L}(L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_t^+; \mathbf{U}); L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_t^+; \mathbf{Y}))$ un opérateur intégral causal. Cet opérateur est dit γ -diffusif s'il existe γ et un espace de Sobolev W'_γ tels que :

$$\exists \mu \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_t^+; W'_\gamma(\mathbb{R}_\xi; \mathcal{L}(\mathbf{U}; \mathbf{Y}))), \quad \forall u \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_t^+; \mathbf{U}), \quad (\mathcal{H}u)(t) = \mu(t) \cdot [(\mathfrak{Rd}_\gamma u)(t)] \quad t\text{-pp.}$$

D'un point de vue synthétique, la γ -réalisation diffusive d'un opérateur \mathcal{H} s'écrit dans tous les cas : $\mathcal{H}u = \mathfrak{Sd}_\gamma \mathcal{H} \cdot \mathfrak{Rd}_\gamma u$; soit encore, sous forme de réalisation locale dans l'espace $W_\gamma(\mathbb{R}_\xi; \mathbf{U}) \ni \psi(t, \cdot)$:

$$\begin{cases} \partial_t \psi = \gamma \psi + u, & \psi(0, \cdot) = 0 \\ \mathcal{H}u = \mu \cdot \psi, \end{cases} \quad (3.17)$$

l'opérateur $(\mu, \psi) \mapsto \mu \cdot \psi$ étant statique.

On trouvera dans [35], [9] de nombreux compléments, notamment sur l'approximation et la mise en œuvre numériques des réalisations locales (3.17), sur le produit de γ -symboles associé au produit de composition d'opérateurs ainsi que de nombreux résultats théoriques et numériques sur l'inversion d'opérateurs diffusifs. Dans ce cadre étendu, la manipulation algébrique des opérateurs intégraux prend un sens concret, c'est-à-dire compatible avec le calcul numérique et donc la mise en œuvre sur ordinateur. En ce sens, la transformation de représentation diffusive constitue un outil efficace pour aborder les problèmes dynamique d'un point de vue global dans les espaces de trajectoires.

3.5 Transformations diffusives de modèles non locaux

On considère un modèle dynamique *non local* de la forme :

$$\Psi(u, x, K(\partial_t)f(u, x)) = 0, \quad (3.18)$$

l'opérateur Ψ étant supposé *quasi statique* (cf. déf. 1.18) et $K(\partial_t)$ étant un opérateur γ -diffusif de γ -symbole μ . Par application de l'opérateur \mathfrak{Rd}_γ sur $f(u, x)$, ce modèle se réécrit :

$$\Psi(u, x, \mu \cdot \mathfrak{Rd}_\gamma f(u, x)) = 0,$$

où $\mathfrak{Rd}_\gamma f(u, x)$ est solution de $\partial_t \psi = \gamma \psi + f(u, x)$, $\psi(0, \cdot) = 0$. Par conséquent, (3.18) se transforme en le modèle *local*, d'état augmenté (x, ψ) :

$$\Phi(u, x, \psi) = 0,$$

avec :

$$\Phi(u, x, \psi) = \begin{pmatrix} \Psi(u, x, \mu \cdot \psi) \\ \partial_t \psi - \gamma \psi - f(u, x) \\ \delta \cdot \psi \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

Theorème 3.8 *Sous les hypothèses précédentes, l'opérateur \mathfrak{Rd}_γ permet de transformer tout modèle dynamique non local de la forme (3.18) en un modèle dynamique local d'état augmenté.*

Un cas particulier important est celui des modèles non locaux *explicites*, de la forme :

$$H(\partial_t)x = F(u, x), \quad (3.19)$$

qui, lorsque $H(\partial_t)^{-1}$ admet un γ -symbole μ , se réécrivent via la transformation \mathfrak{Rd}_γ :

$$x = H(\partial_t)^{-1}F(u, x) = \mu \cdot \mathfrak{Rd}_\gamma F(u, x),$$

c'est-à-dire, finalement, sous forme du *problème de Cauchy* dont $\mathfrak{Rd}_\gamma F(u, x)$ est solution :

$$\partial_t \psi = \gamma \psi + F(u, \mu \cdot \psi), \quad \psi(0, \cdot) = 0, \quad (3.20)$$

la trajectoire x ne faisant alors plus partie des variable du modèle (et se déduisant comme simple "sortie" $x = \mu \cdot \psi$). A noter que la formulation équivalente suivante pourra néanmoins s'avérer intéressante du fait que la variable x reste "visible" dans le modèle :

$$\begin{cases} \partial_t \psi = \gamma \psi + F(u, x), & \psi(0, \cdot) = 0 \\ x = \mu \cdot \psi. \end{cases} \quad (3.21)$$

Remarque 3.9 *Sous l'hypothèse $\gamma(0) = 0$, non restrictive en pratique, tout modèle différentiel de la forme :*

$$\partial_t x = F(u, x) \quad (3.22)$$

admet trivialement la formulation diffusive (3.21) avec $\mu = \delta$ (c'est-à-dire $x(t) = \psi(t, 0)$); d'un point de vue formel, le modèle (3.22) pourra donc être considéré comme cas particulier de (3.21).

Des applications concrètes de la propriété de localisation par l'opérateur \mathfrak{Rd}_γ seront présentées aux chapitres 6 et 7.

Chapitre 4

Transformations de type changement de temps

Sommaire

4.1	Changements de temps généraux	41
4.1.1	Définition et propriétés	41
4.1.2	Inversion d'une opération de changement de temps	43
4.1.3	Changements de temps et dérivation	44
4.2	Changements de temps dynamiques	46
4.2.1	Définition	46
4.2.2	Exemple fondamental : $\mathbf{S}_{\partial_t^{-1}}$	46
4.3	Transformation de modèles par changement de temps	48
4.3.1	Transformation de modèles locaux	48
4.3.2	Transformation de modèles non locaux explicites	49
4.3.3	Suppression de singularités de modèles	51
4.3.4	Découplage des composantes état/entrée pour un système à variables séparées	52
4.4	Changements de temps multiples	53

Il existe de nombreux exemples de systèmes dynamiques physiques admettant de façon naturelle une horloge intrinsèque pour laquelle les équations dynamiques sont grandement simplifiées [15] ; tel est le cas par exemple des phénomènes de frottement sec [46]. Une description formelle des opérateurs de changement de temps et l'étude de leurs propriétés présente le double intérêt de permettre des transformations à la fois générales et relativement simples basées sur ces opérateurs. C'est l'objet de cette section.

Toutes les opérations formelles effectuées dans ce chapitre devront bien sûr être justifiées lors d'applications concrètes.

4.1 Changements de temps généraux

4.1.1 Définition et propriétés

Classiquement, un opérateur de changement de temps est un opérateur de la forme : $x \mapsto x \circ \varphi^{-1}$ où $\varphi(t)$ est une nouvelle échelle de temps, définie par la fonction inversible φ .

Définition 4.1 *L'opérateur général changement de temps \mathbf{S} est défini, pour toute fonction φ continue strictement croissante et toute trajectoire $x \in \mathfrak{X}$, par :*

$$\mathbf{S}(x, \varphi) := x \circ \varphi^{-1}. \quad (4.1)$$

Un tel opérateur est linéaire par rapport à x .

Dans l'optique de l'utilisation de telles transformations pour les systèmes dynamiques, rien n'interdit - et cela sera au contraire largement exploité par la suite - que φ soit obtenue par transformation d'autres fonctions, pouvant éventuellement des inconnues du problème.

Remarque 4.2 *Le cas de changement de temps non strictement croissants ne permet pas a priori une correspondance biunivoque entre les temps t et τ . Toutefois, de telles transformations ne sont pas être exclues a priori car elles se révèlent fertiles dans certaines situations comme, par exemple, les systèmes différentiels à second membre discontinu (inclusions différentielles), cf. par exemple [5]; elles devront être spécifiquement étudiées. En effet, bien que l'inversibilité au sens classique n'ait plus lieu lorsque la croissance de φ n'est plus au sens strict, les domaines sur lesquels cette fonction n'est pas inversible correspondent à un "arrêt" de l'horloge τ et à un inverse φ^{-1} de type fonction multivoque.*

Notation 4.3 ► *Par commodité, on notera*

$$\mathbf{S}_\varphi := \mathbf{S}(\cdot, \varphi)$$

un opérateur de changement de temps, les hypothèses nécessaires sur φ étant implicitement supposées satisfaites.

► *Par souci de clarté, on notera également $\tau := \varphi(t)$ le "nouveau temps" et \tilde{x} la trajectoire x après changement de temps, soit :*

$$\tilde{x} := \mathbf{S}(x, \varphi) = x \circ \varphi^{-1}.$$

► *Enfin, on remarquera que l'opérateur \mathbf{S}_φ peut être défini sur toute trajectoire à valeurs dans un Banach \mathbf{B} . Ainsi, on commettra l'abus, largement utilisé par la suite, consistant à noter \mathbf{S}_φ l'opérateur agissant sur toute trajectoire définie sur I , indépendamment du Banach \mathbf{B} .*

Remarque 4.4 *On peut noter que $\tilde{\varphi} = \mathbf{S}_\varphi(\varphi) = Id : \tau \rightarrow \tau$.*

Du point de vue numérique, un changement de temps est transparent au sens où, la relation $\tilde{x} = x \circ \varphi^{-1}$ s'écrivant

$$\forall t, x(t) = \tilde{x}(\tau(t)),$$

elle se traduit numériquement par une égalité en terme de valeurs prises par les variables \tilde{x} et x ; autrement dit, le vecteur des valeurs $x(t_n)$ et la correspondance entre t_n et τ_n suffiront à définir entièrement le vecteur $\tilde{x}(\tau_n)$.

On établit ci-après quelques propriétés simples qui seront utilisées par la suite.

Proposition 4.5 *Soient $x \in L^\infty(I; \mathbf{X})$ et $g \in L^\infty(I; \mathbb{R})$. Alors :*

$$\widetilde{g x} = \tilde{g} \tilde{x}.$$

Preuve. Découle de la distributivité à droite de la composition sur la multiplication. ■

Proposition 4.6 *L'opération de changement de temps commute avec tout opérateur statique.*

Preuve. Soit une fonction $K : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$, et $\mathcal{K} : L^\infty(I; \mathbf{X}) \rightarrow L^\infty(I; \mathbf{Y})$ l'opérateur statique défini par :

$$\mathcal{K}(x) := K \circ x.$$

Notons de même $\tilde{\mathcal{K}} : L^\infty(\varphi^{-1}(I); \mathbf{X}) \rightarrow L^\infty(\varphi^{-1}(I); \mathbf{Y})$ l'opérateur statique défini par

$$\tilde{\mathcal{K}}(\tilde{x}) := K \circ \tilde{x}.$$

Soit enfin \mathbf{S}_φ un opérateur de changement de temps. Alors, on a :

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}_\varphi \circ \mathcal{K})(x) &= \mathcal{K}(x) \circ \varphi^{-1} = K \circ x \circ \varphi^{-1} \\ &= K \circ \mathbf{S}_\varphi(x) = (\tilde{\mathcal{K}} \circ \mathbf{S}_\varphi)(x). \end{aligned}$$

Par la suite, on effectuera l'abus de notation consistant à identifier les opérateurs \mathcal{K} et $\tilde{\mathcal{K}}$, notés simplement K . ■

Cette propriété justifie l'utilisation de transformations de type changement de temps dans les modèles dynamiques, les opérateurs statiques y étant omniprésents.

Enfin, la propriété suivante est importante du point de vue topologique.

Proposition 4.7 *Un opérateur de changement de temps \mathbf{S}_φ est une isométrie de $L^\infty(I; \mathbf{X})$ dans $L^\infty(\varphi(I); \mathbf{X})$.*

Preuve. Pour tout $x \in L^\infty(I; \mathbf{X})$,

$$\|\mathbf{S}_\varphi(x)\|_{L^\infty(\varphi^{-1}(I); \mathbf{X})} = \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \varphi(I)} \|x \circ \varphi^{-1}(\tau)\|_{\mathbf{X}} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in I} \|x(t)\|_{\mathbf{X}} = \|x\|_{L^\infty(I; \mathbf{X})}.$$

■

En conséquence, les opérateurs de changement de temps préservent la stabilité des trajectoire d'un système dynamique.

4.1.2 Inversion d'une opération de changement de temps

L'inversion d'un changement de temps, indispensable pour conserver l'équivalence des modèles, s'établit sans difficulté.

Proposition 4.8 *L'inverse d'un opérateur de changement de temps $\mathbf{S}(\cdot, \varphi)$ est donné par l'opérateur $\mathbf{S}(\cdot, \varphi^{-1})$, soit encore :*

$$\mathbf{S}_\varphi^{-1} = \mathbf{S}_{\varphi^{-1}}. \quad (4.2)$$

Preuve. On a :

$$\mathbf{S}_\varphi \circ \mathbf{S}_{\varphi^{-1}}(x) = (x \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} = x;$$

on montre de même que $\mathbf{S}_{\varphi^{-1}} \circ \mathbf{S}_\varphi(x) = x$. ■

On dispose de plus de la proposition suivante, qui établit une autre formulation du changement de temps et de son inverse.

Proposition 4.9 Si $\varphi \in C^1(I; \mathbb{R})$, alors, on a la relation :

$$\varphi^{-1} = \partial_\tau^{-1} \left(\frac{1}{\widetilde{\varphi'}} \right), \quad (4.3)$$

qui permet d'écrire :

$$\begin{cases} \mathbf{S}_\varphi^{-1} = \mathbf{S}_{\partial_\tau^{-1} \frac{1}{\widetilde{\varphi'}}} \\ \mathbf{S}_\varphi = \mathbf{S}_{\left[\partial_\tau^{-1} \frac{1}{\widetilde{\varphi'}} \right]^{-1}}. \end{cases} \quad (4.4)$$

Preuve. L'égalité (4.3) découle de la relation :

$$(\varphi^{-1})' = \frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}} = \frac{1}{\widetilde{\varphi'}}; \quad (4.5)$$

l'établissement de (4.4) est alors immédiat en utilisant (4.2). ■

Ainsi, on dispose avec (4.2)-(4.4) de quatre expressions de l'opération de changement de temps et de sa réciproque, reposant sur φ ou $\widetilde{\varphi}$, et pouvant être utilisées indifféremment au gré des données dont on dispose, faisant du changement de temps une transformation à la fois simple d'utilisation et souple. Ces expressions deviennent particulièrement intéressantes dans le cadre des changements de temps particuliers étudiés en §4.2.2.

4.1.3 Changements de temps et dérivation

On établit dans ce paragraphe quelques résultats relatifs à la composition des opérateurs de dérivation et de changement de temps. Ces résultats seront en particulier utiles dans le cadre de changements de temps de systèmes locaux, abordés plus en détail dans les Sections 4.3.

Remarque préliminaire 4.10 Afin d'éviter toute confusion entre les opérations de dérivation (improprement) notées ∂_t , ∂_τ et les temps t , τ , exprimables l'un en fonction de l'autre, on notera souvent ∂ ou $(.)'$ l'opération de dérivation. Ainsi, x' et \widetilde{x}' désigneront respectivement la dérivée des trajectoires x et \widetilde{x} (relativement à leurs temps "propres" respectifs : t pour x , τ pour \widetilde{x}). De même, si $K : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$, alors K' désignera la dérivée de K , en tant qu'application $\mathbf{X} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$. Les notations usuelles ∂_t , ∂_τ , plus intuitives, seront cependant utilisées lorsqu'aucune confusion n'est à craindre.

Proposition 4.11 Soient $\varphi \in C^1(I; \mathbb{R})$ avec $\varphi' > 0$ et x dérivable. Alors, on a :

$$\mathbf{S}_\varphi \circ \partial = \mathbf{S}_\varphi(\varphi') (\partial \circ \mathbf{S}_\varphi),$$

soit encore :

$$\mathbf{S}_\varphi(x') = \mathbf{S}_\varphi(\varphi') [\mathbf{S}_\varphi(x)]'.$$

De manière plus concise :

$$\widetilde{x'} = \widetilde{\varphi'} \widetilde{x'}. \quad (4.6)$$

Preuve. En utilisant la règle de dérivation des fonctions composées :

$$[\mathbf{S}(x, \varphi)]' = (x \circ \varphi^{-1})' = (\varphi^{-1})' (x' \circ \varphi^{-1})$$

et la relation

$$(\varphi^{-1})' = \frac{1}{\widetilde{\varphi'}},$$

on obtient le résultat annoncé. ■

Remarque 4.12 La dérivation étant considérée au sens des distributions, la propriété (4.6) permet d'étendre sans ambiguïté l'opérateur \mathbf{S}_φ aux espaces de mesures. On a en particulier :

$$\mathbf{S}_\varphi(\delta_{t_0}) = \widetilde{\varphi'}(\tau_0) \delta_{\tau_0}.$$

où $\tau_0 := \varphi(t_0)$.

On donne ci-après une extension de ce résultat à la composition par l'opérateur ∂_t^2 , très présent dans les équations de la physique.

Proposition 4.13 Soient $\varphi \in C^2(I; \mathbb{R})$ avec $\varphi' > 0$ et x deux fois dérivable. Alors, on a :

$$\begin{cases} \partial^2 \circ \mathbf{S}_\varphi = \left[\frac{1}{\mathbf{S}_\varphi(\varphi')} \right]^2 [(\mathbf{S}_\varphi \circ \partial^2) - [\mathbf{S}_\varphi(\varphi'')] (\mathbf{S}_\varphi \circ \partial)] \\ \mathbf{S}_\varphi \circ \partial^2 = [\mathbf{S}_\varphi(\varphi')]^2 (\partial^2 \circ \mathbf{S}_\varphi) + [\mathbf{S}_\varphi(\varphi')] [\mathbf{S}_\varphi(\varphi'')] (\partial \circ \mathbf{S}_\varphi). \end{cases}$$

De manière plus concise :

$$\begin{cases} \widetilde{\tilde{x}''} = \frac{1}{\widetilde{\varphi'}} (\widetilde{x''} - \widetilde{\varphi''} \widetilde{x'}) \\ \widetilde{x''} = \widetilde{\varphi'}^2 \widetilde{\tilde{x}''} + \widetilde{\varphi'} \widetilde{\varphi''} \widetilde{\tilde{x}'} \end{cases} \quad (4.7)$$

Preuve. On utilise la formule

$$(f \circ g)'' = g'^2 f'' \circ g + g'' f' \circ g$$

avec $f = x$ et $g = \varphi^{-1}$ et la relation (4.6) :

$$(x \circ \varphi^{-1})'' = \frac{1}{\widetilde{\varphi'}} \widetilde{x''} + (\varphi^{-1})'' \widetilde{x'}$$

qui devient, en utilisant (4.5) :

$$\widetilde{\tilde{x}''} = \frac{1}{\widetilde{\varphi'}} (\widetilde{x''} - \widetilde{\varphi''} \widetilde{x'}).$$

La seconde relation s'en déduit facilement en utilisant à nouveau (4.6). ■

Remarque 4.14 Pour des opérateurs locaux d'ordre plus élevé, on peut envisager d'utiliser un développement de $(f \circ g)^{(n)}$, ou de se ramener à un système matriciel d'ordre 1. En revanche, l'établissement de telles relations dans le cadre d'opérateurs non locaux est exclu ; rappelons cependant que, dans ce cas, la représentation diffusive permet de transformer les modèles non locaux en modèles locaux augmentés.

4.2 Changements de temps dynamiques

4.2.1 Définition

Dans sa définition première, un changement de temps n'est pas nécessairement un opérateur dynamique : la composition par φ^{-1} est en effet une opération statique. Rien n'interdit cependant à la fonction φ d'être exprimée au moyen d'une transformation d'une fonction, i.e. $\varphi = \varphi(v)$ avec φ un opérateur dynamique.

Définition 4.15 *Un opérateur de changement de temps est dit **dynamique** lorsque $\varphi = \varphi(v)$ avec φ un opérateur dynamique défini sur une variété de trajectoires \mathcal{V} tel que $\forall v \in \mathcal{V}$, $\varphi(v)$ continue et strictement croissante.*

On notera alors \mathbf{S}_φ le (sur-)opérateur¹ de changement de temps :

$$\mathbf{S}_\varphi : v \mapsto \mathbf{S}_{\varphi(v)}.$$

Les temps t et $\tau = \varphi(t)$ étant différents, la causalité de tels opérateurs de changement de temps ne peut être définie au sens ordinaire. Cependant, on peut établir une notion de causalité adaptée à ces opérateurs qui pourra être utile, notamment pour leur mise en œuvre en temps réel.

Définition 4.16 *L'opérateur de changement de temps \mathbf{S}_φ est dit causal si et seulement si l'opérateur φ est causal.*

Avec des changements de temps causaux, l'horloge $\varphi(v)$ est déterminée de manière causale à partir de la fonction v ; ainsi, sous réserve que φ soit de complexité raisonnable, un tel changement de temps pourra être déterminé en temps réel, $\varphi(v)$ ne dépendant pas de $v|_{]t, +\infty[}$. Dans le paragraphe 4.2.2, le changement de temps causal particulier défini par $\varphi = \partial_t^{-1}$ sera étudié en détail.

De plus, la correspondance $\tau \mapsto t$ étant résolue dès que l'est $t \mapsto \tau$, les notions de causalité par rapport à t et par rapport à τ sont en ce sens compatibles.

Remarque 4.17 *De ce qui précède, on déduit que la complexité numérique d'un opérateur de changement de temps est caractérisée par celle de l'opérateur φ .*

Remarque 4.18 *Un changement de temps dynamique peut a priori être appliqué à la trajectoire v elle-même :*

$$\tilde{v} = \mathbf{S}_{\varphi(v)}(v) = v \circ \varphi(v)^{-1}.$$

Si l'opérateur est causal cette expression est très simple à mettre à œuvre et est, sous réserve que l'opérateur φ soit de complexité raisonnable, compatible avec les contraintes de temps réel.

4.2.2 Exemple fondamental : $\mathbf{S}_{\partial_t^{-1}}$

On s'intéresse dans cette section à l'opérateur de changement de temps dynamique (causal) $\mathbf{S}_{\partial_t^{-1}}$, central car à la base des transformations de modèles locaux (cf. section 4.3) et générique pour une vaste classe de modèles dynamiques non locaux par transformation de type représentation diffusive. Cet opérateur possède plusieurs propriétés intéressantes, directement déduites du paragraphe 4.1.1.

¹Il s'agit plus précisément d'une *fonction opératorielle*, c'est-à-dire un "opérateur à valeur opérateur".

La proposition 4.9 permet d'écrire les différentes expressions de cet opérateur de changement de temps et de son inverse :

$$\begin{cases} \mathbf{S}_{\partial_t^{-1}(v)}(x) = x \circ [\partial^{-1}v]^{-1} = x \circ \left[\partial^{-1} \left(\frac{1}{\tilde{v}} \right) \right] \\ \mathbf{S}_{\partial_t^{-1}(v)}^{-1}(\tilde{x}) = \tilde{x} \circ \partial^{-1}v = \tilde{x} \circ \left[\partial^{-1} \left(\frac{1}{\tilde{v}} \right) \right]^{-1}, \end{cases} \quad (4.8)$$

soit, de manière plus concise :

$$\mathbf{S}_{\partial_t^{-1}(v)} = \mathbf{S}_{\partial_\tau^{-1}(\frac{1}{\tilde{v}})}^{-1} = \mathbf{S}_{[\partial_t^{-1}(v)]}^{-1}. \quad (4.9)$$

Ces expressions font intervenir exclusivement v et \tilde{v} , et sont toutes deux basées sur l'opérateur dynamique causal $\mathbf{S}_{\partial_t^{-1}}$; elles sont indifféremment utilisables lors de mises en œuvre, quitte à effectuer une inversion numérique (de fonction) au besoin.

Remarque 4.19 Dans (4.8), figurent notamment les expressions suivantes des différentes horloges :

$$\begin{aligned} \tau &= \varphi(t) = \partial_t^{-1}v(t) = \left[\partial_\tau^{-1} \frac{1}{\tilde{v}} \right]^{-1}(t), \\ t &= \varphi^{-1}(\tau) = \partial_\tau^{-1} \frac{1}{\tilde{v}}(\tau) = [\partial_t^{-1}v]^{-1}(\tau), \end{aligned}$$

qui seront fréquemment utilisées par la suite.

Dans toute la suite du chapitre, et par souci de concision, F , g désignent des fonctions de t , pouvant en particulier être de la forme $F(t, u, x)$ et $g(t, u, x)$, avec F et g des opérateurs statiques.

La proposition qui suit est essentielle de par les nombreuses applications dont elle est susceptible de faire l'objet ; cette propriété sera notamment utilisée dans le cadre de la simplification de modèles par changement de temps.

Proposition 4.20 Soient $g \in C^0(I; \mathbb{R}^{+*})$ et x dérivable. Alors :

$$\mathbf{S} \left(g x', \partial_t^{-1} \frac{1}{g} \right) = \left[\mathbf{S} \left(x, \partial_t^{-1} \frac{1}{g} \right) \right]'. \quad (4.10)$$

De manière plus synthétique :

$$g \partial_t \xrightarrow{\mathbf{S}_{\partial_t^{-1} \frac{1}{g}}} \partial_\tau.$$

Preuve. Il s'agit d'une conséquence directe de la proposition 4.11. On note $\varphi := \partial_t^{-1} \frac{1}{g}$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(g x', \varphi) &= \mathbf{S}(g, \varphi) \mathbf{S}(x', \varphi) = \tilde{g} \tilde{\varphi}' \tilde{x}' \\ &= \tilde{g} \frac{1}{\tilde{g}} \tilde{x}' = \tilde{x}'. \end{aligned}$$

■

4.3 Transformation de modèles par changement de temps

On met en évidence dans cette section les propriétés des changements de temps en tant que transformations de modèles dynamiques.

4.3.1 Transformation de modèles locaux

On note comme précédemment par $\widetilde{(\cdot)}$ tout objet (\cdot) transformé par changement de temps. Il découle directement de la proposition (4.20) et du fait que les opérateurs de changement de temps commutent avec les opérateurs statiques :

Proposition 4.21 *On considère le modèle dynamique :*

$$\Phi(u, x, g \partial_t x, \delta \cdot x) = 0, \quad (4.11)$$

avec Φ un opérateur statique et $g \in C^0(I; \mathbb{R}^{+*})$. Alors, par application de l'opérateur de changement de temps $\mathbf{S}_{\partial_t^{-1} \frac{1}{g}}$, l'équation (4.11) est transformée en² :

$$\Phi(\tilde{u}, \tilde{x}, \partial_\tau \tilde{x}, \delta \cdot \tilde{x}) = 0, \quad (4.12)$$

la correspondance entre τ et t étant indifféremment définie par³ $\partial_t \tau = \frac{1}{g}$ ou $\partial_\tau t = \tilde{g}$.

Un opérateur de changement de temps adapté peut donc permettre de transformer une équation différentielle du premier ordre $g \partial_t x = F(u, x)$, dont l'opérateur différentiel est à coefficient g variable (et dépendant éventuellement de x), en l'équation différentielle :

$$\partial_\tau \tilde{x} = F(\tilde{u}, \tilde{x}).$$

On peut également noter qu'une telle opération peut permettre de s'affranchir de la présence de termes qui pourraient, pour une raison ou une autre, s'avérer "gênants" en les "absorbant" dans l'opérateur de dérivation ∂_τ .

Dans le cas de modèles non locaux, la représentation diffusive permettra le plus souvent d'appliquer ce résultat après transformation en un modèle augmenté local équivalent (cf. section suivante). En ce sens, la proposition 4.21 constitue un cas générique potentiellement utile pour simplifier des problèmes dynamiques. Certains exemples seront présentés par la suite.

Remarque 4.22 *Concrètement, la simulation d'un modèle en temps τ , ayant pour indéterminée \tilde{u} , ne pose pas de problème : connaissant u , la fonction \tilde{u} est en effet déterminée dès que l'est la correspondance entre t et τ (puisque $\tilde{u}(\tau) = u(t)$). En particulier, si u est donnée à différents instants t_n , une interpolation de u (par spline par exemple) permettra d'accéder à une approximation de u aux instants $t(\tau_n)$ requis pour l'évaluation de $\tilde{u}(\tau_n)$, et ce avec une précision maîtrisable.*

Remarque 4.23 *On peut également établir, dans certains cas, des résultats similaires concernant des systèmes impliquant un opérateur $g \partial_t^2$, en utilisant le résultat de la proposition 4.13. Ainsi, une équation de la forme*

$$g_2(t) \partial_t^2 x + g_1(t, x) \partial_t x = f(t, x),$$

²On rappelle que l'opération de changement de temps commute avec les opérateurs statiques.

³Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, on commet, par souci de clarté, l'abus qui consiste à assimiler le nombre τ (resp. t) à la fonction $\varphi : t \mapsto \tau$ (resp. $\varphi^{-1} : \tau \mapsto t$).

avec $g_2(t) > 0$, sera transformée, après application de l'opérateur de changement de temps $\mathbf{S} \left(\cdot, \partial_t^{-1} \frac{1}{\sqrt{g_2(t,x)}} \right)$ et calculs, en :

$$\partial_\tau^2 \tilde{x} + \tilde{g}_1(\tau, \tilde{x}) \frac{\tilde{g}_2'(\tau)}{\tilde{g}_2(\tau)} \partial_\tau \tilde{x} = \tilde{f}(\tau, \tilde{x}).$$

Notons que le cas où $g_2 = g_2(t, x)$ se traite de la même manière mais sera, selon l'expression de g_2 , plus ou moins complexe à écrire à cause du terme $\tilde{\varphi}''$ dans (4.7), qui fera intervenir les dérivées partielles de g_2 et x' (φ étant ici $\partial_t^{-1} \frac{1}{\sqrt{g_2(t,x)}}$).

4.3.2 Transformation de modèles non locaux explicites

On considère un modèle de la forme :

$$H(\partial_t) x = g F, \quad (4.13)$$

avec $H(\partial_t)^{-1}$ un opérateur linéaire diffusif; on suppose en outre que $g > 0$ pour tout t . Après transformation par représentation diffusive (cf. chapitre 3), ce système devient :

$$\partial_t \psi = \gamma \psi + g F, \quad \psi(0, \xi) = 0 \quad (4.14a)$$

$$x = \mu \cdot \psi. \quad (4.14b)$$

L'équation (4.14a) s'écrit encore :

$$\frac{1}{g} \partial_t \psi = \frac{\gamma \psi}{g} + F, \quad \psi(0, \xi) = 0. \quad (4.15)$$

Par changement de temps dynamique :

$$\mathbf{S} : x \mapsto x \circ (\partial_t^{-1} g)^{-1}, \quad (4.16)$$

on déduit de la proposition 4.21 le modèle équivalent en temps τ :

$$\partial_\tau \tilde{\psi} = \frac{\gamma}{\tilde{g}} \tilde{\psi} + \tilde{F}, \quad \tilde{\psi}(0, \xi) = 0. \quad (4.17)$$

D'où :

Theorème 4.24 *Par application du changement de temps (4.16), le modèle (4.14) est transformé en :*

$$\begin{cases} \partial_\tau \tilde{\psi} = \frac{\gamma}{\tilde{g}} \tilde{\psi} + \tilde{F}, \quad \tilde{\psi}(0, \xi) = 0 \\ \tilde{x} = \mu \cdot \tilde{\psi}, \end{cases} \quad (4.18)$$

la correspondance $t \leftrightarrow \tau$ étant indifféremment définie par $\partial_t \tau = g$ ou $\partial_\tau t = \frac{1}{g}$.

On peut noter que le système (4.18) présente la particularité d'être basé sur l'opérateur (de diffusion) : $\tilde{\gamma} := \frac{\gamma}{\tilde{g}}$ variable dans le temps (dépendant éventuellement, à travers \tilde{g} , de l'état $\tilde{\psi}$). Si le contour $\gamma(\mathbb{R})$ vérifie la propriété d'invariance $k \gamma(\mathbb{R}) = \gamma(\mathbb{R}) \quad \forall k > 0$ (par exemple si $\gamma(\xi) =$

$|\xi| e^{i\alpha \text{signe}(\xi)}$), alors une transformation par changement de fréquence va permettre d'obtenir une réalisation diffusive t -invariante en un certain sens, à savoir dans un système de coordonnées adapté.

En effet, on a dans ce cas :

$$\frac{1}{\tilde{g}} \gamma(\xi) = \gamma\left(\frac{\xi}{\tilde{g}}\right);$$

on définit alors, pour tout τ , le changement de variable σ_τ et l'opérateur \mathbf{T}_τ correspondant, définis par :

$$\begin{aligned} \sigma_\tau &: \xi \mapsto \eta := \frac{\xi}{\tilde{g}}, \\ \mathbf{T}_\tau &: v \mapsto \hat{v} := v \circ \sigma_\tau^{-1}. \end{aligned}$$

L'équation dynamique de (4.18) s'écrit :

$$\partial_\tau \tilde{\psi} = \gamma \circ \sigma_\tau \tilde{\psi} + \tilde{F}, \quad \tilde{\psi}(0, \xi) = 0. \quad (4.19)$$

En notant $\hat{\psi} = \mathbf{T}_\tau \tilde{\psi}$, c'est-à-dire, explicitement : $\hat{\psi}(\tau, \xi) = \tilde{\psi}(\tau, \frac{\xi}{\tilde{g}(\tau)})$, on a alors la propriété :

$$\partial_\tau \tilde{\psi}(\tau, \xi) = \frac{d}{d\tau} \hat{\psi}(\tau, \sigma_\tau^{-1} \xi) = \frac{d}{d\tau} \hat{\psi}(\tau, \frac{\xi}{\tilde{g}(\tau)}),$$

et, par application de l'opérateur \mathbf{T}_τ l'équation (4.19) devient :

$$\frac{d}{d\tau} \hat{\psi} = \gamma \hat{\psi} + \tilde{F}, \quad \hat{\psi}(0, \eta) = 0, \quad (4.20)$$

avec $\frac{d}{d\tau}$ désignant la *dérivée particulaire* relativement au flot de trajectoires $(\tau, \frac{\xi}{\tilde{g}(\tau)})$ dans le plan $\mathbb{R}_\tau \times \mathbb{R}_\eta$.

Selon la terminologie introduites dans le chapitre 3, la quantité notée $\mathfrak{Ad}_{\tilde{g}}^{\tilde{F}} := \hat{\psi}$ solution de cette équation peut ainsi s'interpréter comme représentation diffusive “particulaire” de \tilde{F} sur le flot de trajectoires $(\tau, \frac{\xi}{\tilde{g}(\tau)})$. Selon ce point de vue, (4.20) est l'équation de $\mathfrak{Ad}_{\tilde{g}}^{\tilde{F}}$ en *coordonnées lagrangiennes* (τ, ξ) .

Enfin, en remarquant que l'opérateur $\frac{d}{d\tau}$ s'écrit, en coordonnées (τ, η) :

$$\frac{d}{d\tau} = \partial_\tau - \eta (\ln \tilde{g})' \partial_\eta,$$

l'équation de $\mathfrak{Ad}_{\tilde{g}}^{\tilde{F}}$ en *coordonnées eulériennes* est alors :

$$\partial_\tau \hat{\psi} = \gamma \hat{\psi} + (\ln \tilde{g})' \eta \partial_\eta \hat{\psi} + \tilde{F}, \quad \hat{\psi}(0, \eta) = 0.$$

La relation $\tilde{x} = \mu \cdot \tilde{\psi}$ devient quant à elle :

$$\tilde{x} = \int \mu(\xi) \tilde{\psi}(\cdot, \xi) d\xi = \int \mu(\xi) \hat{\psi}(\cdot, \frac{\xi}{\tilde{g}}) d\xi = \tilde{g} \int \mu(\tilde{g}\eta) \hat{\psi}(\cdot, \eta) d\eta.$$

D'où le résultat :

Theorème 4.25 *Si γ est une fonction homogène, alors le modèle (4.14) est équivalent au modèle diffusif “particulaire” sur le flot de trajectoires $(\tau, \frac{\xi}{\tilde{g}(\tau)})$:*

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} \hat{\psi} = \gamma \hat{\psi} + \tilde{F}, & \hat{\psi}(0, \eta) = 0 \\ \tilde{x} = \int \nu \hat{\psi} d\eta, \end{cases} \quad (4.21)$$

avec $\nu(\tau, \eta) := \tilde{g}(\tau) \mu(\tilde{g}(\tau) \eta)$, la correspondance $t \leftrightarrow \tau$ étant indifféremment définie par $\partial_t \tau = g$ ou $\partial_\tau t = \frac{1}{\tilde{g}}$.

Ce modèle devient, en coordonnées eulériennes, l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$\begin{cases} \partial_\tau \hat{\psi} - (\ln \tilde{g})' \eta \partial_\eta \hat{\psi} = \gamma \hat{\psi} + \tilde{F}, & \hat{\psi}(0, \eta) = 0. \\ \tilde{x} = \int \nu \hat{\psi} d\eta, \end{cases} \quad (4.22)$$

L'équation de sortie de (4.21) et (4.22) est *a priori* implicite (mais statique), du fait de la possible dépendance par rapport à \tilde{x} de \tilde{g} ; concrètement, un schéma numérique permettra alors d'expliciter la relation. Dans certains cas, cette relation s'explicite analytiquement (cf. le chapitre 6 par exemple).

Remarque 4.26 *On peut noter que ce résultat constitue l'équivalent pour les modèles diffusifs (4.14a) de la proposition 4.21 dans le cas de modèles différentiels explicites :*

$$\begin{aligned} \partial_t x &= Fg \stackrel{\mathbf{S}_{\partial_t^{-1}g}}{\rightsquigarrow} \partial_\tau \tilde{x} = \tilde{F}, \\ (\partial_t - \gamma) \psi &= Fg \stackrel{\mathbf{T}_\tau \circ \mathbf{S}_{\partial_t^{-1}g}}{\rightsquigarrow} \left(\frac{d}{d\tau} - \gamma \right) \hat{\psi} = \tilde{F}. \end{aligned}$$

On présente ci-après quelques cas pour lesquels l'application de ces résultats est susceptible d'apporter une simplification significative aux problèmes dynamiques basés sur le modèle.

4.3.3 Suppression de singularités de modèles

On considère seulement le cas des modèles diffusifs explicites, le cas des systèmes différentiels ordinaires se traitant de manière similaire en supprimant les termes relatifs à γ .

Les transformations précédemment introduites permettent de supprimer, par changement d'horloge adapté, une singularité dans (4.13) de la forme :

$$g = \frac{1}{h(t, u, x)},$$

résultant d'une trop grande proximité de h à la valeur 0. Dans une telle situation, la manipulation des réalisations (4.14a) (resp. (4.15)) est délicate, l'équation d'état étant singulière du fait de la présence du produit singulier gF (resp. du coefficient h petit devant $\partial_t \psi$).

En revanche, la transformation par changement de temps dynamique :

$$\mathbf{S} : x \mapsto x \circ \left[\partial_t^{-1} \frac{1}{h(\tau, \tilde{u}, \tilde{x})} \right]^{-1},$$

permet de supprimer cette singularité, le système s'écrivant en temps τ :

$$\begin{cases} \partial_\tau \tilde{\psi} = \tilde{h}(\tau, \tilde{u}, \tilde{x}) - \gamma \tilde{\psi} + \tilde{F}(\tau, \tilde{u}, \tilde{x}), & \tilde{\psi}(0, \xi) = 0 \\ \tilde{x} = \mu \cdot \tilde{\psi}, \end{cases}$$

la correspondance entre t et τ étant définie par

$$\partial_\tau t = \tilde{h}(\tau, \tilde{u}, \tilde{x}). \quad (4.23)$$

Cette propriété est utilisée au chapitre 6 pour l'analyse d'un modèle (non local, implicite, singulier) de flammes sphériques de Joulin [25].

Remarque 4.27 *On peut souligner que, bien que les deux correspondances entre t et τ soient équivalentes, dans le cas présent, seule la correspondance (4.23) est concrètement utilisable (l'autre faisant intervenir la quantité singulière $\frac{1}{h(t,u,x)}$). Ceci n'est pas surprenant : le modèle initial (en temps t) étant singulier, la simulation ne pourra se faire correctement qu'en temps τ , temps pour lequel, précisément, la singularité est supprimée.*

Remarque 4.28 *En effectuant dans ce cas de figure le changement de fréquences aboutissant à (4.22) dans le but d'obtenir un contour γ invariant, on s'aperçoit que la transformation réintroduit la singularité initiale dans le modèle. Il est cependant remarquable que, lorsque celui-ci est exprimé dans le système de coordonnées lagrangiennes (modèle (4.21)), le modèle n'est plus singulier.*

4.3.4 Découplage des composantes état/entrée pour un système à variables séparées

Pour la même raison que dans la section précédente, on considère seulement le cas des modèles diffusifs.

Un autre intérêt potentiel des changements de temps réside en leur capacité à découpler, dans certains cas, les termes de commande et d'état pour un système à variables séparées. Supposons en effet que dans (4.14a), on ait : $gF = A(x) + B(u)C(x)$, avec A, B, C des opérateurs statiques et C une fonction à valeurs réelles strictement positives. Alors le modèle correspondant :

$$\begin{cases} \partial_t \psi = \gamma \psi + A(x) + B(u)C(x), & \psi(0, \xi) = 0 \\ x = \mu \cdot \psi, \end{cases} \quad (4.24)$$

est transformé, en utilisant le changement de temps dynamique :

$$\mathbf{S} : x \mapsto x \circ (\partial_t^{-1}(C(x)))^{-1},$$

en :

$$\begin{cases} \partial_\tau \tilde{\psi} = \frac{\gamma}{C(\tilde{x})} \tilde{\psi} + \frac{A(\tilde{x})}{C(\tilde{x})} + B(\tilde{u}), & \tilde{\psi}(0, \xi) = 0 \\ \tilde{x} = \mu \cdot \tilde{\psi}, \end{cases} \quad (4.25)$$

la correspondance entre τ et t étant définie par $\partial_t \tau = C(x)$ ou $\partial_\tau t = \frac{1}{C(\tilde{x})}$. Le système en temps

τ (4.25) présente l'avantage de voir son terme d'entrée $B(\tilde{u})$ découplé de la variable d'état $\tilde{\psi}$, propriété largement bénéfique lorsqu'il s'agit de contrôler un tel système.

Dans le cas où $B(u)$ est une fonction à valeurs réelles positives, on peut de même envisager d'isoler le terme $C(x)$ en utilisant le changement d'horloge $\partial_t^{-1}(B(u))$. Ceci a été utilisé dans l'étude du problème de commande d'un modèle de bioréacteur (cf. chapitre 8), ce qui a permis de mettre en évidence un paramétrage (cf. chapitre 5) non trivial simplifiant de manière significative le traitement du problème.

4.4 Changements de temps multiples

On se propose dans cette section d'étendre le concept de changement de temps et les résultats qui s'y rattachent. On considère désormais $x \in \mathfrak{X}_1 \times \dots \times \mathfrak{X}_n$ et $\varphi \in C^0(I; \mathbb{R})^n$ avec φ_i strictement croissante pour tout i .

Définition 4.29 *Un opérateur de changement de temps multiple est défini par :*

$$\mathbf{S}(x, \varphi) := \begin{pmatrix} x_1 \circ \varphi_1^{-1} \\ \vdots \\ x_n \circ \varphi_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, un tel opérateur transforme une trajectoire vectorielle en temps t en une trajectoire vectorielle en des temps multiples⁴. La notation

$$\tilde{x} := \mathbf{S}(x, \varphi)$$

est employée par commodité mais ne doit pas faire oublier que chaque variable \tilde{x}_i évolue dans son temps propre, que l'on notera $\tau_i := \varphi_i(t)$. Par ailleurs, la variable x_i peut également être exprimée par rapport à un temps τ_j autre que son temps propre τ_i ; aussi, afin d'éviter tout conflit, on adoptera la notation :

$$\widetilde{x_i^j} := x_i \circ \varphi_j^{-1}.$$

Il convient de noter que la connaissance d'une trajectoire $\widetilde{x_i^j}$ suffit à déterminer entièrement cette même trajectoire exprimée dans une autre échelle de temps τ_k , grâce à la relation :

$$\widetilde{x_i^j} = x_i \circ \varphi_j^{-1} = \widetilde{x_i^k} \circ \varphi_k \circ \varphi_j^{-1};$$

cela se traduit encore par l'égalité à chaque instant t :

$$x_i(t) = \widetilde{x_i^j}(\tau_j(t)) = \widetilde{x_i^k}(\tau_k(t)).$$

Comme signalé pour le changement de temps simple, au plus numérique, ceci se traduit par le fait que le vecteur des valeurs de la trajectoire x_i et la correspondance entre t et τ suffisent à définir entièrement la trajectoire $\widetilde{x_i^k}$.

Les opérateurs de changement de temps multiples héritent de nombreuses propriétés du cas d'un changement de temps simple. On énumère ci-après quelques résultats remarquables, dont les preuves s'effectuent comme dans le cas d'un changement de temps simple.

Notation 4.30 *Dans la suite de cette section, on utilisera la notation $U \bullet V$ pour désigner une multiplication de type Hadamard, c'est-à-dire composante à composante, des vecteurs de fonctions U et V , et $\frac{1}{U}$ (resp. U^{-1}) désignera, lorsqu'il existe, le vecteur de fonctions $(\frac{1}{u_1}, \dots, \frac{1}{u_n})^T$ (resp. $(u_1^{-1}, \dots, u_n^{-1})^T$).*

Proposition 4.31 *Soient $x \in L^\infty(I; \mathbf{X})$ et $G \in L^\infty(I; \mathbb{R})^n$. Alors :*

$$\mathbf{S}_\varphi(G \bullet \partial_t x) = \mathbf{S}_\varphi(G) \bullet \mathbf{S}_\varphi(x).$$

Proposition 4.32 *Un opérateur de changement de temps multiple \mathbf{S}_φ est une isométrie de $L^\infty(I; \prod_{i=1}^n \mathbf{X}_i)$.*

⁴Une fonction φ_i égale à l'identité permet au besoin de conserver la variable x_i dans le temps t .

Proposition 4.33 *L'inverse d'un opérateur de changement de temps $\mathbf{S}(\cdot, \varphi)$ est donnée par l'opérateur $\mathbf{S}(\cdot, \varphi^{-1})$, soit encore :*

$$\mathbf{S}_\varphi^{-1} = \mathbf{S}_{\varphi^{-1}}.$$

Proposition 4.34 *Soient $\varphi \in C^1(I; \mathbb{R})^n$ avec $\varphi'_i > 0 \forall i$ et x dérivable. On a :*

$$(\mathbf{S}_\varphi \circ \partial)(x) = \mathbf{S}_\varphi(\varphi') \bullet (\partial \circ \mathbf{S}_\varphi)(x),$$

ou, de manière plus concise :

$$\begin{cases} \widetilde{x'} = \widetilde{\varphi'} \bullet \widetilde{x'} \\ \widetilde{x'} = \frac{1}{\widetilde{\varphi'}} \bullet \widetilde{x'}. \end{cases} \quad (4.26)$$

De même que dans le cas d'un changement de temps simple, on peut définir naturellement une notion de causalité adaptée à la transformation de problèmes dynamiques.

Définition 4.35 *Un opérateur de changement de temps est dynamique lorsque $\varphi = \varphi(v)$ avec φ un opérateur dynamique défini sur une variété de trajectoires \mathcal{V} tel que $\forall v \in \mathcal{V}$, $\varphi_i(v) \in C^0(I; \mathbb{R})$ strictement croissante pour tout $i = 1 : n$.*

On notera alors \mathbf{S}_φ le (sur-)opérateur de changement de temps :

$$\mathbf{S}_\varphi : v \mapsto \mathbf{S}_{\varphi(v)}.$$

L'opérateur de changement de temps \mathbf{S}_φ est dit causal si et seulement si l'opérateur φ est un opérateur causal.

On déduit alors aisément :

Proposition 4.36 *Soit $G \in C^0(I; \mathbb{R}^{+*})^n$ et x dérivable. Alors :*

$$\mathbf{S}\left(G \bullet x', \partial_t^{-1} \frac{1}{G}\right) = \left[\mathbf{S}\left(x, \partial_t^{-1} \frac{1}{G}\right)\right]'. \quad (4.27)$$

On a alors le résultat :

Théorème 4.37 *Si $G \in C^0(I; \mathbb{R}^{+*})^n$ et Φ est un opérateur statique, alors le modèle local*

$$\Phi(u, x, G \bullet \partial_t x, \delta \cdot x) = 0 \quad (4.28)$$

devient, après application de l'opérateur de changement de temps $\mathbf{S}_{\partial_t^{-1} \frac{1}{G}}$:

$$\Phi(\tilde{u}, \tilde{x}, \partial_\tau \tilde{x}, \delta \cdot \tilde{x}) = 0, \quad (4.29)$$

la correspondance entre les horloges étant donnée par $\partial_t \tau_i = \frac{1}{G_i}$ ou $\partial_{\tau_i} t = \widetilde{G}_i$, $\forall i = 1 : n$.

Preuve. La démonstration est identique au cas d'un changement de temps scalaire, en utilisant la propriété (4.26) :

$$\mathbf{S}(G \bullet X', \partial_t^{-1} \frac{1}{G}) = \mathbf{S}(G, \partial_t^{-1} \frac{1}{G}) \bullet \mathbf{S}(X', \partial_t^{-1} \frac{1}{G}) = \widetilde{G} \bullet \frac{1}{\widetilde{G}} \bullet \widetilde{X'}.$$

■

Cette formulation permet ainsi de faire évoluer plusieurs temps propres en parallèle et ainsi d'adapter, au besoin, l'échelle de temps à chaque équation. Le changement de temps multiple est *a priori* une transformation d'une grande souplesse d'utilisation, susceptible d'apporter des simplifications partielles de même nature que dans le cas d'un changement de temps simple (découplage, suppression de singularité etc.). En particulier, il est fréquent de rencontrer des modèles singuliers issus d'un couplage entre un phénomène caché à dynamique rapide et un système principal évoluant plus lentement : l'utilisation d'un changement de temps multiple peut alors permettre d'adapter l'horloge du phénomène rapide.

En particulier, lorsqu'on manipule un système en temps multiples tel que (4.29), le lien entre les horloges τ_j se fait au travers de leur relation avec t donnée par $\tau_j = \varphi_j(t)$, qui sont à l'origine de l'augmentation du système (4.29). Comme cela a été signalé, les quantités \widetilde{x}_i^j et \widetilde{x}_i^k sont implicitement liées par la relation :

$$\widetilde{x}_i^j = \widetilde{x}_i^k \circ \varphi_k \circ \varphi_j^{-1}.$$

Si cette relation s'avère être explicite, c'est-à-dire si on peut expliciter une relation directe entre les horloges τ_k et τ_j , alors le système dynamique

$$\Phi(\tilde{u}, \tilde{x}, \partial_\tau \tilde{x}, \delta \cdot \tilde{x}) = 0$$

est *autonome* en ce sens qu'il peut-être considéré (et donc résolu) indépendamment du lien entre t et les horloges τ_i , comme c'est le cas avec un changement de temps simple.

Les changements de temps multiples pourront également s'avérer utiles lorsque l'on traite des systèmes plus généraux que (4.28), de la forme :

$$Q \partial_t x = F, \tag{4.30}$$

avec $Q \in C^0(I; \mathbb{R}^{+*})^{n \times n}$, c'est-à-dire des systèmes faisant intervenir des opérateurs différentiels à coefficients non constants et couplés⁵ :

$$\begin{cases} q_{11} \partial_t x_1 + \dots + q_{1n} \partial_t x_n = f_1 \\ \vdots \\ q_{n1} \partial_t x_1 + \dots + q_{nn} \partial_t x_n = f_n. \end{cases} \tag{4.31}$$

Remarque 4.38 *Le cas où Q est diagonal correspond au modèle de référence (4.28) introduit pour les changements de temps multiples.*

Plusieurs démarches peuvent être envisagées pour simplifier un tel système en utilisant des changements de temps multiples. On ne saurait établir, dans un cadre aussi général, de règle absolue, chaque possibilité pouvant, selon la nature du système et l'objectif que l'on se fixe (paramétrisation, suppression de coefficients singuliers, découplage, etc.), présenter des avantages sur les autres. Citons, à titre d'exemple et de manière non exhaustive, quelques possibilités :

- On peut tout d'abord envisager d'effectuer un changement de temps multiple sur (4.31) en choisissant un temps pour chaque x_i parmi⁶ $\left\{ \partial_t^{-1} \frac{1}{q_{ik}} \right\}_{k=1:n}$. Par exemple, en choisissant pour

⁵Rappelons que Q et F peuvent être de la forme $Q(t, X)$ et $F(t, X)$.

⁶Il faut bien entendu garder à l'esprit que tout autre changement de temps, moins "canonique" est envisageable.

x_i l'échelle de temps $\varphi_i := \partial_t^{-1} \frac{1}{q_{ii}}$, le système (4.31) devient, après application de l'opérateur \mathbf{S}_φ :

$$\partial_{\tau_{ii}} \tilde{x}_i^i + \sum_{j \neq i} \frac{\widetilde{q_{ij}}^i}{\widetilde{q_{ii}}^i} \partial_{\tau_{ii}} \tilde{x}_j^i = \tilde{f}_i^i, \quad i = 1 : n, \quad (4.32)$$

qui présente l'intérêt d'isoler, sur chaque équation, le terme de dérivation d'une variable. Cela peut présenter un intérêt, par exemple, lorsque q_{ii} et $\frac{f_i}{q_{ii}}$ sont singuliers, mais pas les quotients $\frac{q_{ij}}{q_{ii}}$.

► Mettre, au moyen de manipulations aglébriques du système, le système (4.31) sous la forme

$$G \bullet \partial_t x = K,$$

avec $G \in C^0(I; \mathbb{R}^{+*})^n$, et utiliser le résultat du corollaire 4.36 en effectuant le changement de temps $\mathbf{S}_{\partial_t^{-1} \frac{1}{G}}$. Le modèle

$$\tilde{x}' = \tilde{K}$$

obtenu après cette opération présente l'avantage de ne plus avoir de termes différentiels couplés : l'équation est explicite et à coefficients (devant le terme de dérivation) constants.

Exemple 4.39 Soit l'équation différentielle scalaire :

$$\sum_{i=1}^n q_i(t, x) \partial_t^i x = f(x).$$

Alors, en posant

$$X := (x, \partial_t x, \dots, \partial_t^{n-1} x),$$

l'équation se réécrit :

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \\ q_1 & \cdots & \cdots & \cdots & q_n \end{bmatrix} \partial_t X = \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \\ f(x_1) \end{bmatrix}.$$

Ce système peut encore se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t x_1 = x_2 \\ \vdots \\ \partial_t x_{n-1} = x_n \\ q_n(t, x_1) \partial_t x_n = f(x_1) - \sum_{i=1}^{n-1} q_i(t, x_1) x_{i+1}, \end{cases}$$

qui est de la forme $G(t, X) \bullet \partial_t X = F(t, X)$. Un changement de temps indiqué dans la proposition 4.36 (qui ici se résume à un changement de temps de la dernière équation) transforme ce système en le système différentiel à coefficients constants :

$$\begin{cases} \partial_t x_1 = x_2 \\ \vdots \\ \partial_t x_{n-1} = x_n \\ \partial_\tau \widetilde{x}_n = f(\widetilde{x}_1) - \sum_{i=1}^{n-1} \widetilde{q}_i(\tau, \widetilde{x}_1) \widetilde{x}_{i+1}, \\ \partial_t \tau = \frac{1}{q_n(t, x_1)}. \end{cases} \Leftrightarrow \widetilde{X}' = \widetilde{F}(\tau, \widetilde{X}) \quad (4.33)$$

Remarque 4.40 *On peut également écrire tout le système précédent en temps τ :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_\tau \widetilde{x_1} = \widetilde{q_n}(\tau, \widetilde{x_1}) \widetilde{x_2} \\ \vdots \\ \partial_\tau \widetilde{x_{n-1}} = \widetilde{q_n}(\tau, \widetilde{x_1}) \widetilde{x_n} \\ \partial_\tau \widetilde{x_n} = f(\widetilde{x_1}) - \sum_{i=1}^{n-1} \widetilde{q_i}(\tau, \widetilde{x_1}) \widetilde{x_{i+1}}, \\ \partial_t \tau = \frac{1}{q_n(t, x_1)}. \end{array} \right. \quad (4.34)$$

Pour une utilisation concrète d'un changement de temps multiple, on pourra se reporter à la dernière section du chapitre 8.

Chapitre 5

Paramétrisation opératorielle de modèles dynamiques

Sommaire

5.1	Paramétrisation	60
5.1.1	Paramétrage	60
5.1.2	Opérateurs de sortie paramétrique	62
5.1.3	Propriétés	64
5.1.4	Exemples de paramétrages de modèles dynamiques	64
5.2	Équation paramétrique	70
5.3	Paramétrisation partielle	73

Dans le chapitre 1 a été introduite la formulation abstraite des problèmes dynamiques :

$$\Phi(u, x) = 0 \quad (5.1a)$$

$$\mathbb{P}(u, x) = 0. \quad (5.1b)$$

Si la propriété $\mathbb{P}(u, x)$ peut dans une large mesure être choisie par l'ingénieur, il en est en général tout autrement de $\Phi = 0$, qui représente le modèle du processus sur lequel porte le problème $\mathbb{P} = 0$ et dont la résolution (i.e. la mise sous forme $x = \mathbf{F}(u)$) peut être excessivement complexe, sinon inenvisageable.

Sous une forme ou une autre, l'idée de "paramétrer" un modèle en vue de la résolution de problèmes dynamiques est ancienne. De manière synthétique, il s'agit d'exprimer les solutions de l'équation $\Phi(u, x) = 0$ à partir d'une quantité y pouvant être choisie "librement" sous la forme $(u, x) = \mathbf{Q}(y)$, cette expression étant explicite. Dès lors, la résolution effective de l'équation $\Phi = 0$ n'est plus requise et c'est en ce sens que le problème dynamique, ainsi transformé par l'opérateur \mathbf{Q} , est simplifié.

Parmi les différentes approches relevant de cette problématique, la plus ancienne est la *linéarisation par retour d'état* de systèmes différentiels non linéaires [24], thème encore d'actualité de nos jours [18]. Plus récemment, la notion de platitude a étendu cette approche dans un cadre plus formel [16]. Dans certains travaux, les études ont mis l'accent sur des aspects particuliers du problème ; ainsi, la formulation et les propriétés algébriques du problème dans un cadre formel général

ont été étudiées dans [13]; le cas de certains modèles linéaires aux dérivées partielles a été plus spécifiquement abordé dans [37].

Dans nombre de travaux liés à l'idée de paramétrisation, la relation $y \mapsto \mathbf{Q}(y) = (u, x)$ est exprimée au moyen d'opérateurs *locaux*, c'est-à-dire de combinaisons d'opérateurs non linéaires statiques et d'opérateurs différentiels, naturellement compatibles avec une analyse essentiellement basée sur la notion d'espace d'état, qui joue un rôle quasi exclusif dans ces approches. Dans d'autres cas, des opérateurs non locaux sont utilisés, mais la relation $y \mapsto \mathbf{Q}(y)$ reste de nature statique en l'argument y , lui-même constitué d'un vecteur de fonctions obtenues, à partir d'une fonction y_0 , par applications réitérées d'un ou plusieurs opérateurs élémentaires non nécessairement locaux, de symboles p , $e^{-\tau p}$, \sqrt{p} , etc., le cadre naturel de l'étude étant alors celui des anneaux de polynômes en ces opérateurs élémentaires.

Dès lors que l'on considère des modèles non locaux faisant intervenir un ou plusieurs opérateurs $H(\partial_t)$ de symbole H a priori quelconque, de telles approches deviennent mal adaptées, les opérateurs non locaux imposant d'emblée une formulation trajectorielle du système difficile à réduire à une équation locale. En outre, il s'avère que l'utilisation de transformations non locales (e.g. les changements de temps) peut souvent se révéler efficace pour simplifier certains modèles dynamique locaux. Pour ces raisons, il apparaît naturel d'envisager d'étendre le principe de paramétrisation, à savoir la construction de correspondances $y \mapsto (u, x)$ solution du modèle $\Phi(u, x) = 0$, à une classe aussi étendue que possible d'opérateurs \mathbf{Q} sur des *espaces de trajectoires*, contenant en particulier les *inverses* des opérateurs lorsqu'ils existent. Cette classe contiendra en particulier les opérateurs statiques, linéaires dynamiques (locaux et non locaux), de changement de temps, à réalisation locale etc. Le cadre général dans lequel on se place permet ainsi une formulation à la fois riche et formellement simple de la notion de paramétrisation.

Par ailleurs, la construction effective d'un paramétrage au sens strict est souvent un problème difficile voire impossible en pratique. Dans le cadre proposé, il est naturel d'envisager deux affaiblissements de cette notion. On introduit ainsi d'une part, la notion d'*équation paramétrique*, dont le but est la formulation *non résolue* du paramétrage sous la forme d'une équation non analytiquement résoluble (mais dont la résolution *numérique* est censée être bien maîtrisée), d'autre part la notion de *paramétrage partiel*, qui consiste à paramétrer un *sous-modèle* du modèle global.

5.1 Paramétrisation

NB : le terme “paramétrisation” désigne dans la suite le problème consistant à construire un paramétrage, lequel est la fonction dont l'argument est le paramètre.

5.1.1 Paramétrage

Dans tout ce chapitre, on note par simplicité $\mathcal{Z} := \mathcal{U} \times \mathcal{X}$ et $z := (u, x)$.

Définition 5.1 On appelle **paramétrage** de (5.1a) la donnée d'une variété topologique¹ \mathcal{Y} et d'un opérateur continu $\mathbf{Q} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ tel que pour tout $y \in \mathcal{Y}$, $\mathbf{Q}(y)$ soit solution de (5.1a), c'est-à-dire :

$$\forall y \in \mathcal{Y}, z = \mathbf{Q}(y) \Rightarrow \Phi(z) = 0. \quad (5.2)$$

La quantité y est appelée paramètre.

Un paramétrage $(\mathbf{Q}, \mathcal{Y})$ est qualifié de **complet** lorsque \mathbf{Q} réalise un homéomorphisme entre \mathcal{Y} et $\text{graphe}(\mathbf{F})$.

¹Ou, plus généralement, d'un espace topologique.

Remarque 5.2 Les couples solution de (5.1) définissent une variété de $\mathcal{U} \times \mathcal{X}$, qui n'est autre que le graphe de l'application $\mathbf{F} : u \mapsto x$ introduite dans la définition (1.28). En ce sens, $(\mathbf{Q}, \mathcal{Y})$ est un paramétrage du graphe de \mathbf{F} .

Remarque 5.3 Un paramétrage non complet devient un paramétrage complet si on restreint les solution du modèle à $\mathbf{Q}(\mathcal{Y})$. Dit autrement, on peut souvent choisir \mathcal{U} de manière à établir un homéomorphisme avec une variété \mathcal{Y} que l'on choisit a priori, sous réserve bien sûr que celle-ci soit “bien” choisie, i.e. que la restriction qu'elle entraîne sur \mathcal{U} soit suffisamment riche en regard du problème considéré.

Remarque 5.4 Les questions topologiques, notamment la continuité des opérateurs impliqués dans le processus de paramétrisation, sont comme d'habitude essentielles pour assurer la robustesse aux erreurs et incertitudes.

Un paramétrage apparaît donc comme une mise en relation entre tout ou partie des couples solution du modèle (5.1a) avec les éléments d'une variété \mathcal{Y} , permettant de transformer le problème dynamique (5.1), ainsi reformulé :

$$\mathbb{P}(\mathbf{Q}(y)) =: \tilde{\mathbb{P}}(y) = 0, y \in \mathcal{Y}, \quad (5.3)$$

celui-ci étant équivalent à (5.1) si le paramétrage est complet ; dans le cas contraire (5.3) \Rightarrow (5.1) : (5.3) contient donc moins de solution.

L'opérateur \mathbf{Q} permet quant à lui de déduire, de la solution y^* de (5.3), le couple (u^*, x^*) solution de (5.1) correspondant, sans avoir à résoudre l'équation (5.1a) ; en d'autres termes, la variété \mathcal{Y} “résume” le modèle dynamique (5.1a) et permet de “court-circuiter” sa résolution : celui-ci n'intervient plus comme contrainte dynamique du problème, cette contrainte étant remplacée par $y \in \mathcal{Y}$. D'un autre point de vue, le paramétrage (5.2) permet d'accéder à tout couple solution (u, x) de (5.1a) par la seule connaissance de $y \in \mathcal{Y}$ sans avoir à résoudre (5.1a).

L'intérêt pratique d'un paramétrage se trouvera notamment lorsque la résolution effective de (5.3) est plus simple que la résolution du problème initial (5.1). Il est en particulier important, en vue d'une utilisation concrète, que l'opérateur \mathbf{Q} soit de complexité raisonnable (cf. paragraphe 1.1.5).

Remarque 5.5 Un paramétrage n'est pas unique, et de la pertinence du choix du paramétrage découlera une simplification plus ou moins notable de la résolution du problème dynamique associé.

Remarque 5.6 Si $(\mathbf{Q}, \mathcal{Y})$ est un paramétrage de (5.1a), alors \mathcal{Y} et \mathcal{U} sont homéomorphes car $\text{graphe}(\mathbf{F})$ est homéomorphe à \mathcal{U} (conséquence de la nature bien posée du modèle (5.1a)).

Exemple 5.7 \blacktriangleright $(I_{\mathcal{Z}}, \text{graphe}(\mathbf{F}))$ est un paramétrage trivial du modèle (5.1a), correspondant au paramètre $y = z \in \text{graphe}(\mathbf{F})$. Celui ne présente bien sûr aucun intérêt car le problème :

$$\mathbb{P}(z) = 0, z \in \text{graphe}(\mathbf{F}),$$

est identique au problème initial (5.1), la contrainte $z \in \text{graphe}(\mathbf{F})$ étant identique à écrire $\Phi(z) = 0$.

- $((I_{\mathcal{U}}, \mathbf{F}), \mathcal{U})$ est un autre paramétrage trivial de (5.1a), correspondant au paramètre $y = u \in \mathcal{U}$; en effet, $z = (u, \mathbf{F}(u))$ est trivialement solution de $\Phi = 0$, par définition de \mathbf{F} . La continuité de $(I_{\mathcal{U}}, \mathbf{F})$ de \mathcal{U} dans \mathcal{Z} est évidente.

De manière générale, et pour les mêmes raisons, tout homéomorphisme \mathbf{W} entre une variété \mathcal{Y} et \mathcal{U} permet de définir un paramétrage de (5.1a) par $((\mathbf{W}, \mathbf{F} \circ \mathbf{W}), \mathcal{Y})$, correspondant au paramètre $y = \mathbf{W}^{-1}(u)$. De tels paramétrages sont purement formels et ne présentent aucun intérêt en pratique dans la mesure où la complexité du problème (5.3) qui en découle est identique à celle du problème dynamique initial (5.1) puisque faisant intervenir l'opérateur \mathbf{F} , c'est-à-dire la résolution de $\Phi = 0$.

5.1.2 Opérateurs de sortie paramétrique

Bien souvent en pratique, on cherche à “extraire” le paramètre y du modèle $\Phi = 0$, sa définition étant recherchée comme fonction des quantités u et x . L'opérateur de sortie paramétrique, introduit ci-après, est pour ces raisons important, bien que non nécessaire en soi à la construction d'un paramétrage.

Définition 5.8 On appelle **opérateur de sortie paramétrique** de (5.1a) la donnée d'une variété \mathcal{Y} et d'une application continue $\mathbf{A} : \mathcal{U} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ telle que $\mathbf{A}_{\mathbf{F}} := \mathbf{A}|_{\text{graphe}(\mathbf{F})}$ soit un homéomorphisme.

Le paramètre y est, de ce point de vue, également appelé *sortie paramétrique* du modèle.

On a alors le résultat immédiat suivant, liant un opérateur de sortie paramétrique et un opérateur de paramétrage.

Proposition 5.9 Si $(\mathbf{A}, \mathcal{Y})$ est un opérateur de sortie paramétrique de (5.1a), alors $(\mathbf{A}_{\mathbf{F}}^{-1}, \mathcal{Y})$ est un paramétrage complet de (5.1a).

Réciproquement, si \mathbf{Q} est un paramétrage complet de (5.1a), alors tout prolongement continu de \mathbf{Q} à \mathcal{Z} est un opérateur de sortie paramétrique.

Preuve. Si $(\mathbf{A}, \mathcal{Y})$ est un opérateur de sortie paramétrique de (5.1a), alors, par définition, $\mathbf{A}_{\mathbf{F}}$ est un homéomorphisme entre $\text{graphe}(\mathbf{F})$ et \mathcal{Y} ; son inverse est donc un paramétrage complet. La réciproque est évidente. ■

L'opérateur \mathbf{A} peut donc être vu comme prolongement (continu) de l'inverse d'un paramétrage. Lorsque celui-ci est explicite, on notera souvent $(\mathbf{B}, \mathbf{C}) := \mathbf{A}_{\mathbf{F}}^{-1}$ l'opérateur de paramétrage induit par un opérateur de sortie paramétrique \mathbf{A} .

On peut noter que la relation $(u, x) = (\mathbf{B}(y), \mathbf{C}(y))$ est constituée de deux équations découplées, l'une entre y et l'état x , et l'autre entre y et u . En ce sens, l'équation (dynamique en général)

$$x = \mathbf{C}(y) \tag{5.4}$$

peut être interprétée comme un nouveau modèle d'état (*a priori* résolu), dans lequel le paramètre y joue le rôle d'entrée; ceci peut notamment présenter un intérêt pour des problèmes portant essentiellement sur l'état x , la relation (5.4) pouvant avantageusement se substituer au modèle initial (c'est le cas par exemple pour le problème de conception d'un correcteur étudié au chapitre 8).

Remarque 5.10 Une sortie paramétrique y permet de reconstituer à la fois l'état x et l'indéterminée u du modèle; en ce sens, on peut voir le paramétrage comme une observation “renforcée” du système (cf. Figure 5.1).

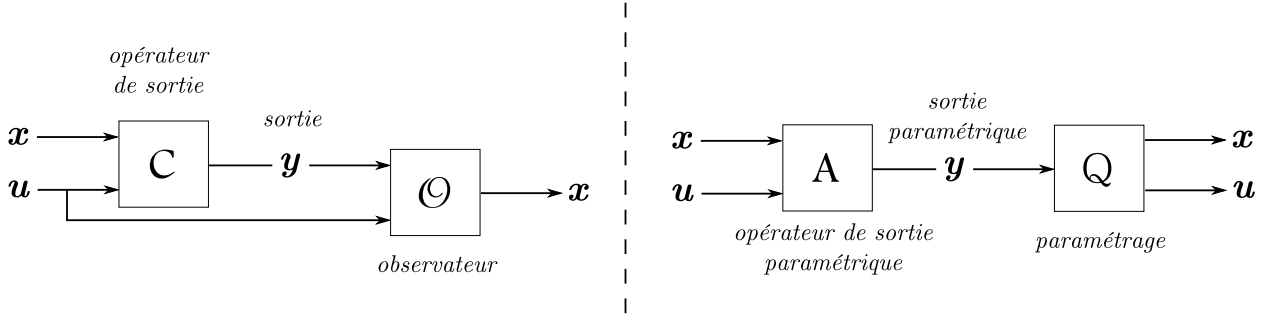


FIG. 5.1 – Comparaison des notions d'observation et de paramétrage.

Remarque 5.11 La sortie y est a priori une mesure fictive : il n'est pas exigé que celle-ci soit effectivement disponible sur le processus physique.

Proposition 5.12 Si \mathbf{A} est un opérateur de sortie paramétrique, alors $\mathbf{A}_{\mathbf{F}}^{-1} \circ \mathbf{A}$ est un projecteur. Plus généralement, si $(\mathbf{A}, \mathcal{Y})$ est un opérateur de sortie paramétrique de (5.1a) et $(\mathbf{Q}, \mathcal{Y})$ un paramétrage complet de (5.1a), alors $\mathbf{Q} \circ \mathbf{A}(\mathcal{Z}) = \text{graphe}(\mathbf{F})$.

Preuve. On note $p := \mathbf{A}_{\mathbf{F}}^{-1} \circ \mathbf{A}$. Pour tout $z \in \mathcal{Z}$, on a :

$$p(z) \in \text{graphe}(\mathbf{F}),$$

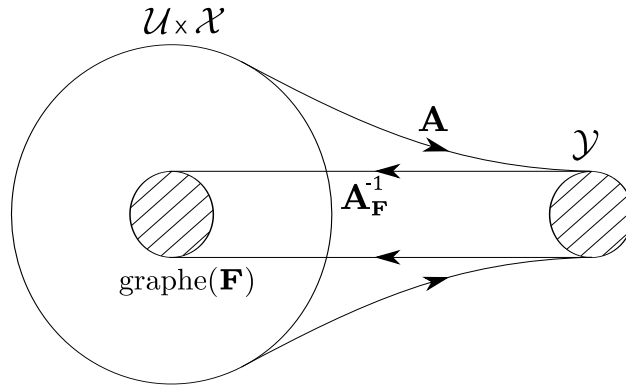
ce qui entraîne $\mathbf{A}(p(z)) = \mathbf{A}|_{\text{graphe}(\mathbf{F})}(p(z))$ et donc :

$$p^2(z) = \mathbf{A}_{\mathbf{F}}^{-1} \circ \mathbf{A}_{\mathbf{F}}(p(z)) = p(z).$$

Plus généralement, si $(\mathbf{Q}, \mathcal{Y})$ un paramétrage complet de (5.1a), alors :

$$\mathbf{Q} \circ \mathbf{A}(\mathcal{Z}) = \mathbf{Q}(\mathcal{Y}) = \text{graphe}(\mathbf{F}).$$

■

FIG. 5.2 – Représentation du projecteur $\mathbf{A}_{\mathbf{F}}^{-1} \circ \mathbf{A}$.

Proposition 5.13 Si $(\mathbf{A}, \mathcal{Y})$ est un opérateur de sortie paramétrique, alors $\forall \mathbf{S} \in \text{Aut}(\mathcal{Y})$, $(\mathbf{S} \circ \mathbf{A}, \mathcal{Y})$ est un opérateur de sortie paramétrique. En particulier, le paramétrage associé est $(\mathbf{A}_{\mathbf{F}}^{-1} \circ \mathbf{S}^{-1}, \mathcal{Y})$.

Preuve. Si $\mathbf{A}|_{\text{graphe}(\mathbf{F})}$ est un homéomorphisme entre $\text{graphe}(\mathbf{F})$ et \mathcal{Y} , il en est de même pour $\mathbf{S} \circ \mathbf{A}|_{\text{graphe}(\mathbf{F})}$, l'opérateur de paramétrage associé étant $(\mathbf{S} \circ \mathbf{A}_{\mathbf{F}})^{-1} = \mathbf{A}_{\mathbf{F}}^{-1} \circ \mathbf{S}^{-1}$. ■

5.1.3 Propriétés

D'un point de vue plus formel, on peut noter que $(\mathbf{Q}, \mathcal{Y})$ est un paramétrage de l'équation $\Phi = 0$ si et seulement si $\Phi \circ \mathbf{Q} = 0$ (en tant qu'application $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{E}$). Ainsi, le paramétrage transforme une équation en une identité :

$$\mathcal{Y} \xrightarrow{\mathbf{Q}} \mathcal{Z} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{E} \iff \mathcal{Y} \xrightarrow{\mathbf{Q}} \mathcal{Z} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{E} \rightarrow 0.$$

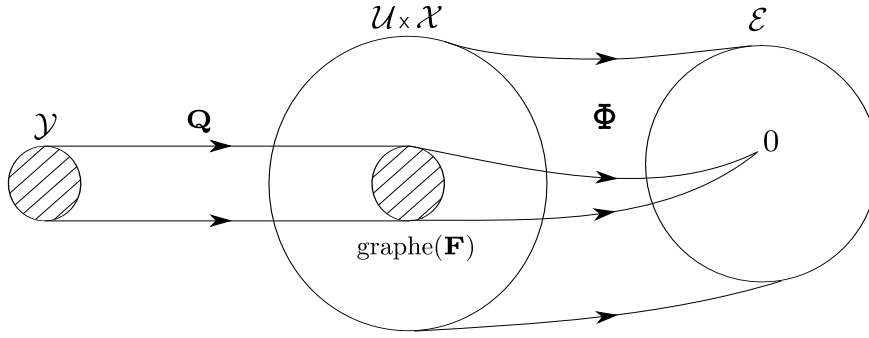


FIG. 5.3 – Ensembles en jeu dans une paramétrisation.

Remarque 5.14 Dans le cas d'un modèle linéaire explicite ($\Phi(u, x) = \mathcal{H}x - Bu$), avec \mathcal{Z}, \mathcal{Y} des espaces vectoriels et \mathbf{Q} un paramétrage linéaire injectif, si Φ est surjective, on a $\ker(\Phi) = \text{Im}(\mathbf{Q})$ et donc la suite exacte courte :

$$0 \rightarrow \mathcal{Y} \xrightarrow{\mathbf{Q}} \mathcal{Z} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{E} \rightarrow 0. \quad (5.5)$$

Notons que dans un tel cas, un paramétrage trivial est obtenu avec $y = u$, $x = (\mathcal{H} - A)^{-1}By$.

Remarque 5.15 On peut par ailleurs montrer que si les opérateurs \mathbf{A}, \mathbf{B} et \mathbf{C} sont locaux et les variétés \mathcal{U} et \mathcal{Y} d'intérieur non vide, alors les espaces de Banach \mathbf{U} et \mathbf{Y} sont nécessairement isomorphes. Si de plus $\dim \mathbf{U}$ est finie (i.e. $u(t) \in \mathbf{U} \sim \mathbb{R}^n$), alors nécessairement : $\dim \mathbf{Y} = \dim \mathbf{U}$. On verra toutefois que, dans une large mesure, la condition d'isomorphie de \mathbf{U} et \mathbf{Y} demeure lorsque $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ est non local, sous l'hypothèse additionnelle² que la condition initiale du système puisse être considérée comme une donnée du problème (i.e. est connue).

5.1.4 Exemples de paramétrages de modèles dynamiques

Linéarisation par retour d'état

La problématique bien connue de "linéarisation par retour d'état" de systèmes dynamiques [16, 21, 22, 23, 24] est un cas particulier de paramétrisation. Soit $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction analytique dans un voisinage de 0 telle que $f(0, 0) = 0$ et $\nabla_u f(u, x)|_{u=0, x=0}$ de rang m . On considère le système d'entrée u suffisamment régulière et de condition initiale x_0 :

$$\dot{x} = f(u, x), \quad t > 0. \quad (5.6)$$

²Réaliste dans bien des cas, comme par exemple le problème de planification de trajectoires.

Ce système est linéarisable par retour d'état s'il existe d'une part deux fonctions $g : \mathbb{R}^{m+n+q} \rightarrow \mathbb{R}^q$, $h : \mathbb{R}^{m+n+q} \rightarrow \mathbb{R}^m$ analytiques dans un voisinage de 0 et telles que $g(0) = 0$, $h(0) = 0$, d'autre part un difféomorphisme K de \mathbb{R}^{n+q} tel que la sortie w du système "compensé" d'entrée v :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(h(v, x, z), x) \\ \dot{z} = g(v, x, z) \\ w = K(x, z) \end{cases}$$

soit solution d'une équation *linéaire* :

$$\dot{w} = Fw + Gv. \quad (5.7)$$

A un retour d'état statique près, le système (5.7) peut alors être transformé en la forme canonique de Brunovsky³ :

$$\begin{cases} \partial_t^{\nu_1} y_1 = v_1 \\ \vdots \\ \partial_t^{\nu_m} y_m = v_m, \end{cases} \quad (5.8)$$

avec $y = Tw$, la matrice T étant inversible. Il en découle qu'il existe deux fonctions B, C telles que, pour tout $t > 0$:

$$x(t) = C(y(t), \partial_t y(t), \dots, \partial_t^{\sup \nu_i} y(t)), \quad (5.9)$$

$$u(t) = B(y(t), \partial_t y(t), \dots, \partial_t^{\sup \nu_i} y(t)), \quad (5.10)$$

soit, en tant qu'*opérateurs* (locaux) sur les trajectoires :

$$\begin{aligned} x &= \mathbf{C}(y), \\ u &= \mathbf{B}(y). \end{aligned}$$

On montre enfin qu'existent également un entier k et une fonction A tels que :

$$y(t) = A(u(t), \partial_t u(t), \dots, \partial_t^k u(t), x(t)), \quad (5.11)$$

soit, en tant qu'opérateur (local) sur les trajectoires :

$$y = \mathbf{A}(u, x).$$

Il apparaît ainsi que la linéarisation par retour d'état conduit, lorsqu'elle est possible, à un cas particulier de paramétrisation du système (5.6), où les opérateurs $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ sont *locaux*. La paramétrisation, qui se place dans le cadre d'une formulation *opératoire* sur des espaces topologiques (de trajectoires) adaptés, permet de s'affranchir de l'utilisation de la géométrie différentielle classique (sur des variétés de \mathbb{R}^k), et autorise l'utilisation de transformations non locales.

Remarque 5.16 Selon la terminologie introduite dans [16], le système (5.6) muni de la sortie y ainsi définie est appelé "système plat"; la sortie (fictive) y est appelée sortie "plate" ou "linéarisante".

Remarque 5.17 Lorsque le système (5.6) est linéaire invariant (de dimension finie), une sortie linéaire plate y peut être obtenue très simplement à partir de la formulation symbolique entrée-sortie du système : $z = \frac{N(p)}{D(p)}u$, les polynômes $N, D \in \mathbb{R}[p]$ étant premiers entre eux (commandabilité du

³Les entiers ν_i désignent les indices de commandabilité associés à (5.7)

système). En effet, d'après le théorème de Bézout, il existe deux polynômes $P, Q \in \mathbb{R}[p]$ tels que $PN + QD = 1$; en posant $y := P(p)z + Q(p)u$, on déduit alors par un calcul très simple [17] :

$$u = D(p)y, \quad z = N(p)y,$$

ce qui, précisément, signifie que u et z s'expriment en fonction des quantités $y, \partial_t y, \dots, \partial_t^k y$. On notera que du seul point de vue algébrique, le même résultat peut être formellement obtenu sur la variable symbolique $\tilde{p} := p^{-1}$ en posant : $\frac{\tilde{N}(\tilde{p}^{-1})}{D(\tilde{p}^{-1})} = \frac{N(p)}{D(p)}$ tel que $\tilde{N}, \tilde{D} \in \mathbb{R}[\tilde{p}]$ (toujours possible), avec $\tilde{P}, \tilde{Q} \in \mathbb{R}[\tilde{p}]$ tels que $\tilde{N}\tilde{P} + \tilde{D}\tilde{Q} = 1$: la localité des opérateurs⁴ n'apparaît donc aucunement comme une nécessité en soi.

Remarque 5.18 On notera que la linéarisation par retour d'état, basée sur des propriétés algébriques contraignantes, ne peut être prolongée aux systèmes de dimension infinie ou aux systèmes non réguliers. En particulier, les expressions (5.9, 5.10, 5.11) ne sont plus valides lorsque $\nu_i = \infty$, les opérateurs $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ devenant alors essentiellement non locaux.

Cas des systèmes linéaires

Dans le cadre des systèmes linéaires (de dimension finie ou non), la paramétrisation opératorielle n'apporte pas d'amélioration substantielle (dès lors que les opérateurs linéaires dynamiques impliqués peuvent être considérés comme numériquement résolubles).

De façon générale, les systèmes différentiels linéaires de condition initiale x_0 peuvent s'écrire⁵ :

$$H(t, \partial_t)x = x_0 \cdot \delta_{t_0} + Bu, \quad x|_{\mathbb{R}^-} = 0,$$

avec $H(t, \partial_t) = \partial_t - A(t)$, d'inverse⁶ $H(t, \partial_t)^{-1}$ causal, de sorte que $x = H(t, \partial_t)^{-1}(x_0 \cdot \delta_{t_0} + Bu)$. Soit un opérateur $\mathbf{A} : (u, x_0, x) \mapsto y = (Cx, x_0)^T$ tel que $\dim Cx(t) = \dim u(t) < \infty$. Alors y peut être exprimé en fonction de u et x_0 seulement :

$$y = (CH(t, \partial_t)^{-1}(x_0 \cdot \delta_{t_0} + Bu), x_0) = (K(t, \partial_t)u + CH(t, \partial_t)^{-1}(x_0 \cdot \delta_{t_0}), x_0) ;$$

si l'opérateur $K(t, \partial_t) := CH(t, \partial_t)^{-1}B$ est inversible et d'inverse continu, alors l'opérateur \mathbf{A} définit une sortie paramétrique, avec paramétrage défini par :

$$\begin{aligned} x_0 &= y_2, \\ u &= \mathbf{B}(y) = K(t, \partial_t)^{-1}(y_1 - CH(t, \partial_t)^{-1}(y_2 \cdot \delta_{t_0})), \\ x &= \mathbf{C}(y) = H(t, \partial_t)^{-1}B[K(t, \partial_t)^{-1}(y_1 - CH(t, \partial_t)^{-1}(y_2 \cdot \delta_{t_0}))]. \end{aligned}$$

Remarque 5.19 Ni la commandabilité ni l'observabilité ne sont nécessaires pour que l'opérateur $K(t, \partial_t)$ soit inversible et donc pour que la sortie $\mathbf{A}(u, x_0, x)$ puisse être paramétrique. Ainsi par exemple, pour le système (non commandable) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda x_1 + u, & x_1(0) = x_{10} \\ \dot{x}_2 = \lambda x_2 + u, & x_2(0) = x_{20}, \end{cases}$$

la sortie $y = \mathbf{A}(u, x_0, x) := (x_2, x_0)$ (pour laquelle le système est non observable) est paramétrique, l'opérateur $K(t, \partial_t) = (\partial_t - \lambda)^{-1}$ étant clairement inversible et d'inverse $(\partial_t - \lambda)$ continu dans $C_+^\infty(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}), f|_{\mathbb{R}^-} = 0\}$.

⁴Rappelons que le symbole p^{-1} est celui de l'intégrateur (opérateur non local) ∂_t^{-1} .

⁵NB : dans le cas d'équations aux dérivées partielles, $H(t, \partial_t) = H(t, \partial_t, z, \nabla_z)$, $z \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$.

⁶Le cadre de référence est une algèbre d'opérateurs causaux sur un espace topologique de fonctions sur \mathbb{R}_t^+ .

Exemple 5.20 *Considérons le système dynamique dans $\mathbf{X} = \mathbb{R}^2$ (NB : les quantités a_1, a_2 peuvent être des fonctions de t) :*

$$(S) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = x_{10} \in \mathbb{R} \\ \dot{x}_2 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + u, & x_2(0) = x_{20} \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (5.12)$$

avec $u \in \mathcal{U} = C^\infty(\mathbb{R}^+)$.

1. L'opérateur $\mathbf{A} : x \in C^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^2) \mapsto y := x_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ définit une sortie paramétrique pour (S), le paramétrage s'exprimant (d'après $u = \ddot{x}_1 - a_1 \dot{x}_1 - a_2 \dot{x}_1$) :

$$\begin{aligned} u &= \mathbf{B}(y) = \partial_t^2 y - a_2 \partial_t y - a_1 y, \\ x &= \mathbf{C}(y) = (y, \partial_t y)^T. \end{aligned}$$

Dans cet exemple, les opérateurs $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ sont locaux.

2. L'opérateur $\mathbf{A} : x \mapsto y := (x_2, x_1(0)) \in C^\infty(\mathbb{R}^+) \times \mathbb{R} \hookrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^2)$ définit également une sortie paramétrique pour (S); en effet, en notant ∂_t^{-1} l'inverse causal de ∂_t , le paramétrage s'exprime :

$$\begin{aligned} u &= \mathbf{B}(y) = \partial_t y_1 - a_2 y_1 - a_1 y_2 - a_1 \partial_t^{-1} y_1, \\ x &= \mathbf{C}(y) = (y_2 + \partial_t^{-1} y_1, y_1)^T; \end{aligned}$$

Dans cet exemple (et les trois suivants), les opérateurs $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ sont non locaux (on notera que les espaces \mathbb{R} et \mathbb{R}^2 ne sont pas isomorphes). Au plan numérique, les évaluations de $\partial_t y$ et ∂_t^{-1} ont des coûts équivalents, l'opérateur non local ∂_t^{-1} admettant la réalisation locale : $\partial_t z = y, y(t_0) = 0$, qui permet l'intégration récursive : $\tilde{z}(t + \Delta t) = \tilde{z}(t) + \Delta t y(t)$. Il en est de même pour ∂_t^2 et ∂_t^{-2} , etc.

3. Si $\mathcal{X} \subset \mathbb{X}_0 := \{x \in C^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^2); x(0) = x_0\}$ (i.e., plus prosaïquement : dans le modèle (5.12), la condition initiale est fixée, supposée connue), alors l'opérateur $\mathbf{A} : x \mapsto y = x_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ définit également une sortie paramétrique pour (S), le paramétrage s'exprimant :

$$\begin{aligned} u &= \mathbf{B}(y) = \partial_t y - a_2 y - a_1 \partial_t^{-1} y - a_1 x_{10}, \\ x &= \mathbf{C}(y) = (\partial_t^{-1} y + x_{10}, y)^T. \end{aligned}$$

4. L'opérateur⁷ $\mathbf{A} : x \mapsto y = (\partial_t x_2, x_1(0), x_2(0)) \in C^\infty(\mathbb{R}^+) \times \mathbb{R}^2 \hookrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^3)$ définit également une sortie paramétrique pour (S), le paramétrage s'exprimant :

$$\begin{aligned} u &= \mathbf{B}(y) = y_1 - a_1 y_2 - (t a_1 + a_2) y_3 - a_2 \partial_t^{-1} y_1 - a_1 \partial_t^{-2} y_1, \\ x &= \mathbf{C}(y) = (y_2 + t y_3 + \partial_t^{-2} y_1, y_3 + \partial_t^{-1} y_1)^T. \end{aligned}$$

5. On peut montrer que l'opérateur⁸ (non linéaire) $\mathbf{A} : x \in \mathbb{X}_0 \mapsto y = (\partial_t^{\frac{1}{2}} x_2)^3 \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ définit également une sortie paramétrique pour (S), le paramétrage s'exprimant :

$$\begin{aligned} u &= \mathbf{B}(y) = \partial_t^{\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{3}} - a_2 \partial_t^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}} - a_1 \partial_t^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}}, \\ x &= \mathbf{C}(y) = (\partial_t^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}}, \partial_t^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}})^T. \end{aligned}$$

⁷L'opérateur $\partial_t : C^\infty(\mathbb{R}_t^+) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}_t^+)$ est ici défini par : $(\partial_t x)(t) = \frac{dx(t)}{dt} \forall t > 0, (\partial_t x)(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (\partial_t x)(t)$.

⁸Les opérateurs $\partial_t^{-\frac{1}{2}}, \partial_t^{\frac{1}{2}}$ et $\partial_t^{\frac{3}{2}}$ sont ici définis respectivement par :

$$\forall t > 0, (\partial_t^{-\frac{1}{2}} x)(t) = \int_0^t \frac{x(s) ds}{\sqrt{\pi(t-s)}}, (\partial_t^{\frac{1}{2}} x)(t) = [\partial_t(\partial_t^{-\frac{1}{2}} x)](t), (\partial_t^{\frac{3}{2}} x)(t) = [\partial_t^2(\partial_t^{-\frac{1}{2}} x)](t);$$

on vérifie alors que l'opérateur $\partial_t^{\frac{1}{2}}$ ainsi défini (sur \mathbb{X}_0) est injectif et donc que les opérateurs $\partial_t^{\frac{1}{2}}$ et $\partial_t^{-\frac{1}{2}}$ sont inverses l'un de l'autre.

A titre d'illustration, une réalisation diffusive des opérateurs **B** et **C** définis ci-dessus est donnée par :

$$\begin{cases} \partial_t \psi = -\xi \psi + \partial_t^2 y^{\frac{1}{3}}, & \psi(0) = 0 \\ \mathbf{B}(y) = \langle \mu_{\frac{1}{2}} - a_2 \otimes \mu_{\frac{3}{2}} - a_3 \otimes \mu_{\frac{5}{2}}, \psi \rangle \\ \mathbf{C}(y) = (\langle \mu_{\frac{5}{2}}, \psi \rangle, \langle \mu_{\frac{3}{2}}, \psi \rangle)^T, \end{cases}$$

où $\mu_\alpha(\xi) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \text{pf}_{\xi^\alpha} [35]$.

Pendule simple avec frottements secs (modèle de Coulomb)

On considère l'inclusion différentielle dans $\mathbf{X} = \mathbb{R}^2$:

$$(S) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = x_{10} \\ \dot{x}_2 + \sin x_1 + \lambda \mathbf{h}(x_2) \ni u, & x_2(0) = x_{20}, \end{cases} \quad (5.13)$$

où $\lambda > 0$ et \mathbf{h} est la fonction *multivoque* :

$$\mathbf{h}(x) = \text{signe}(x) \text{ si } x \neq 0, \quad \mathbf{h}(0) = [-1, 1].$$

Il est connu que ce modèle est bien posé si u est bornée [46].

Proposition 5.21 *La sortie $\mathbf{A} : x \mapsto y = x_1$ est paramétrique pour (S), avec :*

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= \{y \in W^{2,\infty}(0, T), (\partial_t y)^{-1}(0) \text{ de mesure nulle dans } [0, T]\}, \\ \mathcal{U} &= \partial_t^2 \mathcal{Y} + \sin(\mathcal{Y}) + \lambda \text{signe}(\partial_t \mathcal{Y}) \subset L^\infty(0, T), \\ \mathcal{X} &= \mathcal{Y} \times \partial_t \mathcal{Y} \subset W^{2,\infty}(0, T) \times W^{1,\infty}(0, T); \end{aligned}$$

ces variétés étant munies des topologies induites respectivement par $W^{2,\infty}(0, T)$, $L^\infty(0, T)_{*-faible}$, $W^{2,\infty}(0, T) \times W^{1,\infty}(0, T)$. Le paramétrage s'exprime :

$$\begin{aligned} u &= \mathbf{B}(y) = \partial_t^2 y + \sin y + \lambda \text{signe}(\partial_t y), \\ x &= \mathbf{C}(y) = (y, \partial_t y)^T. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Preuve. 1. **A** est continu du fait que l'application projection $x \mapsto x_1$ est continue.

2. **C** : $\mathcal{Y} \rightarrow W^{2,\infty}(0, T) \times W^{1,\infty}(0, T)$ est continu car $\partial_t : W^{2,\infty} \rightarrow W^{1,\infty}$ est continu.

3. Montrons que **B** : $\mathcal{Y} \rightarrow L^\infty(0, T)_{*-faible}$ est continu. D'une part $y \mapsto \partial_t^2 y + \sin y$ est clairement continue de $W^{2,\infty}(0, T)$ dans $L^\infty(0, T)$ et donc de \mathcal{Y} dans $L^\infty(0, T)_{*-faible}$. D'autre part, l'opérateur ∂_t étant continu de $W^{2,\infty}(0, T)$ dans $W^{1,\infty}(0, T)$, il suffit d'établir la continuité de l'opérateur statique $\text{signe} : \mathcal{Z} \subset W^{1,\infty}(0, T) \rightarrow L^\infty(0, T)_{*-faible}$ où

$$\mathcal{Z} = \{z \in W^{1,\infty}(0, T), z^{-1}(0) \text{ de mesure nulle dans } [0, T]\};$$

celle-ci découle du théorème 1.3.13. et de la continuité de l'injection $W^{1,\infty}(0, T) \hookrightarrow L^\infty(0, T)$. ■

Remarque 5.22 *On vérifie de même que $\mathbf{A} : x \mapsto y = x_2$ est également paramétrique pour (S), avec $\mathcal{Y} \subset W^{1,\infty}(0, T)$.*

Remarque 5.23 La variété \mathcal{Y} précédemment définie exclut les solutions (u, x) telles que $x_2 = 0$ sur un ensemble de mesure non nulle. Pour les solutions ne vérifiant pas cette propriété, sur l'ensemble $I_y \subset [0, T]$ où $\partial_t y = 0$, la valeur de u peut être indifféremment choisie dans $\sin y + \lambda[-1, 1]$ (car on a alors nécessairement $\dot{x} = 0 \ \forall u(t) \in \sin y + \lambda[-1, 1]$) : le système est **immobile** (en particulier, la valeur $u(t) = \mathbf{B}(y(t)) = \partial_t^2 y(t) + \sin y(t) + \lambda \operatorname{signe}(\partial_t y(t)) = \sin y(t)$, constante sur tout intervalle dans I_y , convient). Pour prendre aisément en compte ces solutions, il suffit de considérer le changement de temps défini par $\frac{d\varphi}{dt} = \operatorname{signe}(|x_2|)$; relativement à cette horloge, le système (S) s'écrit presque partout comme une **équation différentielle** :

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}_1}{d\tau} = \tilde{x}_2, & \tilde{x}_1(0) = x_{10} \\ \frac{d\tilde{x}_2}{d\tau} + \sin \tilde{x}_1 + \lambda \mathbf{h}(\tilde{x}_2) = \tilde{x}, & \tilde{x}_2(0) = x_{20}, \end{cases} \quad \tau\text{-pp}$$

avec, par construction, $\tilde{x}_2^{-1}(0)$ de mesure nulle dans $\varphi([0, T])$, du fait que le temps τ est arrêté lorsque $x_2 = 0$ sur I_y . Il est ensuite possible d'insérer des portions de trajectoires immobiles, sans conséquence sur les propriétés topologiques, celles-ci étant relative au temps τ . La continuité de l'opérateur \mathbf{B} défini sur $\mathcal{Y} = W^{2,\infty}(0, T)$ se déduit en effet de celle de l'opérateur $\tilde{\mathbf{B}}$ associé à (S_τ) et de celle de l'isométrie :

$$\begin{aligned} L^\infty(0, T) &\rightarrow L^\infty(0, \varphi(T)) \\ z &\mapsto z \circ \varphi^{-1}. \end{aligned}$$

Pendule simple avec saturation et/ou zones mortes

Soit le système dynamique dans $\mathbf{X} = \mathbb{R}^2$:

$$(S) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = x_{10} \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 - \operatorname{sat}(x_2) + u, & x_2(0) = x_{20}, \end{cases}$$

où :

$$\operatorname{sat}(x_2) = \begin{cases} x_2 & \text{si } -1 < x_2 < 1 \\ 1 & \text{si } x_2 > 1 \\ -1 & \text{si } x_2 < -1 \end{cases}$$

La sortie $\mathbf{A} : x \mapsto y = x_1$ est paramétrique pour (S) , le paramétrage étant donné par :

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= H^2(0, T), \\ u &= \mathbf{B}(y) = \sin y + \operatorname{sat}(\partial_t y) + \partial_t^2 y, \quad x_2 = \partial_t y. \end{aligned}$$

La même conclusion a lieu pour $y = \mathbf{A}(x) = x_2$, avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= H^1(0, T) \\ \mathbf{B}(y) &= \sin(\partial_t^{-1} y + x_{20}) + \operatorname{sat}(y) + \partial_t y. \end{aligned}$$

La même conclusion a lieu pour $\dot{x}_2 = -\sin x_1 + \operatorname{sat}(-\operatorname{sat}(x_2) + u)$, $y = \mathbf{A}(x) = x_1$, avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= \{y \in W^{2,\infty}(0, T); -1 \leq \partial_t^2 y + \sin y \leq 1\} \\ \mathbf{B}(y) &= \sin y + \operatorname{sat}(\partial_t y) + \partial_t^2 y. \end{aligned}$$

D'autres types de non-linéarités non régulières, telles les classiques fonctions "zones mortes" définies par $g(\xi) = \xi - \eta$ si $\xi > \eta$, $g(\xi) = \xi + \eta$ si $\xi < -\eta$, $g(\xi) = 0$ si $-\eta < \xi < \eta$, peuvent être

abordés de la même manière. Ainsi, pour le pendule simple avec $\dot{x}_2 = -\sin x_1 - \lambda g(x_2) + u$, $y = x_1$ est une sortie paramétrique pour le système, le paramétrage étant donné par $u = \partial_t^2 y + \sin y + \lambda g(\partial_t y)$. De même, pour $\dot{x}_2 = -\sin x_1 + g(u)$, les sorties $y_1 = x_1$, $y_2 = -\sin x_1 + g(u)$ sont toutes deux paramétriques, le paramétrage étant obtenu respectivement par (NB : g^{-1} est une fonction discontinue en 0, avec, par convention, $g^{-1}(0) = 0$) :

$$u = g^{-1}(\partial_t^2 y + \sin y),$$

$$x = (\partial_t^{-2} y + x_{10} + t x_{10}, \partial_t^{-1} y + x_{20})^T, u = g^{-1}(y + \sin(\partial_t^{-2} y + x_{10} + t x_{10}));$$

la continuité de \mathbf{B} pour des topologies adéquates a lieu, en vertu du théorème 2.6, respectivement si y est choisie telle que :

$$\partial_t^2 y + \sin y \neq 0 \quad t\text{-pp sur } [0, T],$$

$$y + \sin(\partial_t^{-2} y + x_{10} + t x_{10}) \neq 0 \quad t\text{-pp sur } [0, T].$$

Systèmes non locaux

Tous les exemples de paramétrage précédents restent formellement valides si on remplace les opérateurs ∂_t , ∂_t^{-1} par des opérateurs non locaux ${}^9 H_i(\partial_t)$, $H_i(\partial_t)^{-1}$ respectivement. Dans ce contexte général, il peut être judicieux, pour la recherche d'une sortie paramétrique, de rassembler toutes ou certaines des composantes linéaires du système dans l'opérateur $H(\partial_t)$. Ainsi par exemple, pour le système :

$$\begin{cases} H_1(\partial_t)x_1 = A_1^1 x_1 + A_1^2 x_2 \\ H_2(\partial_t)x_2 = A_2^2 x_2 + f_2(x_1) + u, \end{cases}$$

aucune sortie paramétrique n'apparaît de façon évidente ; or, sous la forme suivante, équivalente en posant $\tilde{H}_1(\partial_t) := H_1(\partial_t) - A_1^1$, $\tilde{H}_2(\partial_t) := H_2(\partial_t) - A_2^2$:

$$\begin{cases} \tilde{H}_1(\partial_t)x_1 = A_1^2 x_2 \\ \tilde{H}_2(\partial_t)x_2 = f_2(x_1) + u, \end{cases}$$

la sortie $y = f_2(x_1) + u$ est clairement paramétrique, le paramétrage étant donné par :

$$x_2 = \tilde{H}_2(\partial_t)^{-1} y, \quad x_1 = \tilde{H}_1(\partial_t)^{-1} A_1^2 x_2(y), \quad u = y - f_2(x_1(y)).$$

Plus généralement, pour le système : $H(\partial_t)x = Ax + (0, f_2(x_1) + u)^T$, la sortie $y = f_2(x_1) + u$ est paramétrique : cela apparaît clairement en posant $\tilde{H}(\partial_t) := H(\partial_t) - A$, le système s'exprimant alors : $\tilde{H}(\partial_t)x = (0, y)^T$, et le paramétrage : $x = \tilde{H}(\partial_t)^{-1}(0, y)^T$, $u = y - f_2(x_1(y))$.

5.2 Équation paramétrique

Dans la définition de la notion de paramétrage, la relation $z = \mathbf{Q}(y)$ de (5.2) peut être vue comme une équation (résolue) liant le paramètre y à la solution z du modèle $\Phi = 0$. Il peut s'avérer utile, sinon indispensable dans certains cas, de poser le problème de la paramétrisation en un sens affaibli, en n'imposant pas *a priori* le caractère résolu de cette relation entre y et z , mais en permettant au contraire l'écriture de celle-ci sous forme implicite. Ceci motive la définition suivante.

⁹Supposés, au moins numériquement, bien déterminés, par exemple via une réalisation diffusive.

$$\begin{array}{ccc}
\text{(équation ou modèle paramétrique)} & \Psi(y, z) = 0 & \Leftrightarrow z = \mathbf{Q}(y) \\
& \Downarrow & \\
\text{(équation ou modèle d'état)} & \Phi(u, x) = 0 & \Leftrightarrow x = \mathbf{F}(u).
\end{array}$$

FIG. 5.4 – Liens entre équation paramétrique, paramétrage et modèle.

Définition 5.24 Soient \mathcal{Y} une variété, \mathcal{P} un espace vectoriel topologique et $\Psi : \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{P}$ un opérateur. L'équation dans $\mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$:

$$\Psi(y, z) = 0 \quad (5.15)$$

est dite *équation paramétrique* pour (5.1a) si et seulement si cette équation est bien posée par rapport à y et si :

$$\forall (y, z) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}, \Psi(y, z) = 0 \Rightarrow \Phi(z) = 0. \quad (5.16)$$

Une équation paramétrique constituant un problème bien posé par rapport à y , la correspondance $y \mapsto z$ est continue et laisse entrevoir, du fait de la relation (5.16), un paramétrage sous-jacent à l'équation paramétrique. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 5.25 Une équation de la forme (5.15) est paramétrique pour (5.1a) si et seulement s'il existe un paramétrage $(\mathbf{Q}, \mathcal{Y})$ de (5.1a) tel que :

$$\forall (y, z) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}, \Psi(y, z) = 0 \Leftrightarrow z = \mathbf{Q}(y). \quad (5.17)$$

Preuve. Si $\Psi(y, z) = 0$ est une équation paramétrique, alors elle est bien posée par rapport à y sur $\mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$; il existe donc, par définition, un opérateur $\mathbf{Q} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ continu vérifiant (5.2) donc $(\mathbf{Q}, \mathcal{Y})$ est un paramétrage.

Réciproquement, s'il existe un paramétrage $(\mathbf{Q}, \mathcal{Y})$ vérifiant (5.17), alors $\Psi = 0$ est par définition bien posé. ■

Ainsi, une équation paramétrique définit un paramétrage $(\mathbf{Q}, \mathcal{Y})$. En particulier, si l'opérateur \mathbf{Q} ainsi défini réalise un homéomorphisme entre \mathcal{Y} et $\text{graphe}(\mathbf{F})$, l'équation paramétrique est complète (i.e. le paramétrage qu'elle définit est complet).

Remarque 5.26 Les propriétés établies dans le paragraphe 5.1 s'appliquent aux équations paramétriques complètes.

Une équation paramétrique s'interprète donc comme un nouveau modèle, d'entrée y et d'état z ; on peut en ce sens parler d'une augmentation d'état du fait que $z = (u, x)$. En dépit de cette apparente complexification, il peut arriver que le problème obtenu après paramétrage soit plus simple que le problème initial, notamment si l'équation paramétrique est résoluble (éventuellement numériquement) à coût réduit par rapport au modèle initial.

Bien qu'une équation paramétrique soit a priori implicite, on prendra soin de noter que, en pratique, même si elle ne peut être entièrement résolue, il peut arriver que celle-ci prenne la forme découplée :

$$\begin{cases} \Psi_1(y, u) = 0 \\ \Psi_2(y, x) = 0, \end{cases}$$

dans laquelle le paramètre y joue le rôle d'entrée. Comme cela a été signalé précédemment concernant les paramétrages résolus de la forme :

$$\begin{cases} u = \mathbf{B}(y) \\ x = \mathbf{C}(y), \end{cases}$$

une telle formulation peut s'avérer intéressante pour résoudre les problèmes dynamiques portant essentiellement sur l'état x , la relation $\Psi_2(y, x) = 0$ pouvant avantageusement se substituer au modèle initial.

Les propositions qui suivent sont utiles pour la constructions concrète de paramétrages.

Proposition 5.27 *Si $\Psi = 0$ est une équation paramétrique pour (5.1a), alors pour toute transformation homéomorphe $\mathbf{S} : \mathcal{Z} \rightarrow \tilde{\mathcal{Z}}$, l'équation $\tilde{\Psi} = 0$ avec $\tilde{\Psi}(y, \tilde{z}) := \Psi(y, \mathbf{S}^{-1}(\tilde{z}))$ est une équation paramétrique pour le modèle $\tilde{\Phi}(\tilde{z}) := \Phi \circ \mathbf{S}^{-1}(\tilde{z}) = 0$.*

En notant $(\mathbf{Q}, \mathcal{Y})$ le paramétrage défini par $\Psi = 0$, le paramétrage défini par $\tilde{\Psi} = 0$ est alors $(\mathbf{S} \circ \mathbf{Q}, \mathcal{Y})$.

Preuve. L'équation $\tilde{\Psi}(y, \tilde{z}) = 0$ est bien posée par rapport à y car :

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(y, \tilde{z}) = 0 &\Leftrightarrow \Psi(y, \mathbf{S}^{-1}(\tilde{z})) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{S}^{-1}(\tilde{z}) = \mathbf{F}(y) \\ &\Leftrightarrow \tilde{z} = (\mathbf{S} \circ \mathbf{F})(y) \end{aligned}$$

avec $\mathbf{S} \circ \mathbf{F}$ continue. De plus, comme $\Psi = 0$ est une équation paramétrique pour $\Phi = 0$, on a :

$$\forall (y, \tilde{z}) \in \mathcal{Y} \times \tilde{\mathcal{Z}}, \quad \tilde{\Psi}(y, \tilde{z}) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\Psi(y, \mathbf{S}^{-1}(\tilde{z}))}_{\in \mathcal{Z}} = 0 \Rightarrow \Phi(\mathbf{S}^{-1}(\tilde{z})) = 0,$$

donc $\tilde{\Psi} = 0$ est une équation paramétrique de $\tilde{\Phi} = 0$.

Le même raisonnement sur le paramétrage $(\mathbf{Q}, \mathcal{Y})$ défini par $\Psi = 0$ conduit au second résultat.

■

Cette proposition permet de déduire une équation paramétrique pour un modèle à partir de la connaissance d'une équation paramétrique d'une transformation homéomorphe de ce modèle ; il sera notamment utilisé dans le chapitre 8. Un résultat semblable peut être établi concernant une application sur la variété du paramétrage.

Proposition 5.28 *Soit $\mathbf{S} : \tilde{\mathcal{Y}} \rightarrow \mathcal{Y}$ un opérateur continu, et $\Psi = 0$ est une équation paramétrique de (5.1a). Alors l'équation $\tilde{\Psi} = 0$ avec $\tilde{\Psi}(\tilde{y}, z) := \Psi(\mathbf{S}(\tilde{y}), z)$ est une équation paramétrique (pour le même modèle).*

En notant $(\mathbf{Q}, \mathcal{Y})$ le paramétrage défini par $\Psi = 0$, le paramétrage associé à $\tilde{\Psi} = 0$ est alors $(\mathbf{Q} \circ \mathbf{S}, \tilde{\mathcal{Y}})$.

Preuve. L'équation $\tilde{\Psi}(\tilde{y}, z) = 0$ est bien posée par rapport à \tilde{y} car :

$$\tilde{\Psi}(\tilde{y}, z) = 0 \Leftrightarrow \Psi(\mathbf{S}(\tilde{y}), z) = 0 \Leftrightarrow z = \mathbf{F}(\mathbf{S}(\tilde{y})),$$

avec $\mathbf{F} \circ \mathbf{S}$ continue. De plus, comme $\Psi = 0$ est une équation paramétrique pour $\Phi = 0$, on a :

$$\forall (\tilde{y}, z) \in \tilde{\mathcal{Y}} \times \mathcal{Z}, \quad \tilde{\Psi}(\tilde{y}, z) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\Psi(\mathbf{S}(\tilde{y}), z)}_{\in \mathcal{Y}} = 0 \Rightarrow \Phi(z) = 0,$$

donc $\tilde{\Psi} = 0$ est une équation paramétrique de $\Phi = 0$.

Le même raisonnement sur le paramétrage $(\mathbf{Q}, \mathcal{Y})$ défini par $\Psi = 0$ conduit au second résultat.

■

Remarque 5.29 Dans la dernière proposition, la surjectivité de \mathbf{S} n'est a priori pas requise ; il faut cependant noter que si \mathbf{S} est non surjective, le paramétrage obtenu après transformation ne peut être complet (même si le paramétrage initial l'était). En effet, on a dans ce cas :

$$\mathbf{S}(\tilde{\mathcal{Y}}) \subsetneq \mathcal{Y},$$

et donc :

$$\tilde{\mathbf{Q}}(\tilde{\mathcal{Y}}) \subsetneq \mathbf{Q}(\mathcal{Y}) \subseteq \text{graphe}(\mathbf{F});$$

$\tilde{\mathbf{Q}}$ ne peut donc pas être un homéomorphisme entre $\tilde{\mathcal{Y}}$ et $\text{graphe}(\mathbf{F})$.

Remarque 5.30 L'équation paramétrique (5.15) étant de structure similaire à (5.1a), il est possible d'envisager de paramétrer à son tour (5.15), et ainsi de suite.

5.3 Paramétrisation partielle

On considère un modèle de la forme :

$$(S_1) \quad \Phi_1(u, x_1, x_2) = 0, \quad (u, x_2) \in \mathcal{U} \times \mathcal{X}_2, \quad x_1 \in \mathcal{X}_1,$$

supposé bien posé par rapport à (u, x_2) . On a alors le résultat formel suivant, permettant la construction d'un paramétrage de tout système bien posé dont (S_1) serait un sous-système.

Proposition 5.31 Soit $(\mathbf{Q}_1, \mathcal{Y}_1)$ un paramétrage de (S_1) . Soit également le système, bien posé par rapport à u :

$$(S) \quad \begin{cases} \Phi_1(u, x_1, x_2) = 0 \\ \Phi_2(u, x_1, x_2) = 0 \end{cases}, \quad u \in \mathcal{U}, \quad (x_1, x_2) \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2.$$

Alors, $(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_1^{-1}(\text{graphe}(\mathbf{F})))$ définit un paramétrage de (S) . Celui-ci est de plus complet si $(\mathbf{Q}_1, \mathcal{Y}_1)$ est complet pour (S_1) .

Preuve. On note $\mathcal{Z} := \mathcal{U} \times \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$. Le système (S_1) bien posé par rapport à (u, x_2) , i.e. il existe $\mathbf{F}_1 : \mathcal{U} \times \mathcal{X}_2 \rightarrow \mathcal{X}_1$ continu tel que $\forall (u, x_1, x_2) \in \mathcal{Z}$,

$$\Phi_1(u, x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \mathbf{F}_1(u, x_2).$$

$(\mathbf{Q}_1, \mathcal{Y}_1)$ est un paramétrage de (S_1) (et donc de la variété $\text{graphe}(\mathbf{F}_1)$) :

$$\forall (y_1, u, x_1, x_2) \in \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Z}, \quad (u, x_1, x_2) = \mathbf{Q}(y_1) \implies \Phi_1(u, x_1, x_2) = 0.$$

Le système (S) bien posé par rapport à u , donc il existe $\mathbf{F} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ continu tel que $\forall (u, x_1, x_2) \in \mathcal{Z}$,

$$\Phi(u, x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2) = \mathbf{F}(u).$$

En particulier, $\text{graphe}(\mathbf{F})$ est une sous-variété de $\text{graphe}(\mathbf{F}_1)$, donc $\mathcal{Y} := \mathbf{Q}_1^{-1}(\text{graphe}(\mathbf{F})) \subset \mathcal{Y}_1$, et

$$\forall (y, u, x_1, x_2) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}, \quad (u, x_1, x_2) = \mathbf{Q}_1(y) \implies \Phi_1(u, x_1, x_2) = 0,$$

ce qui montre que $(\mathbf{Q}, \mathcal{Y})$ est un paramétrage de (S) .

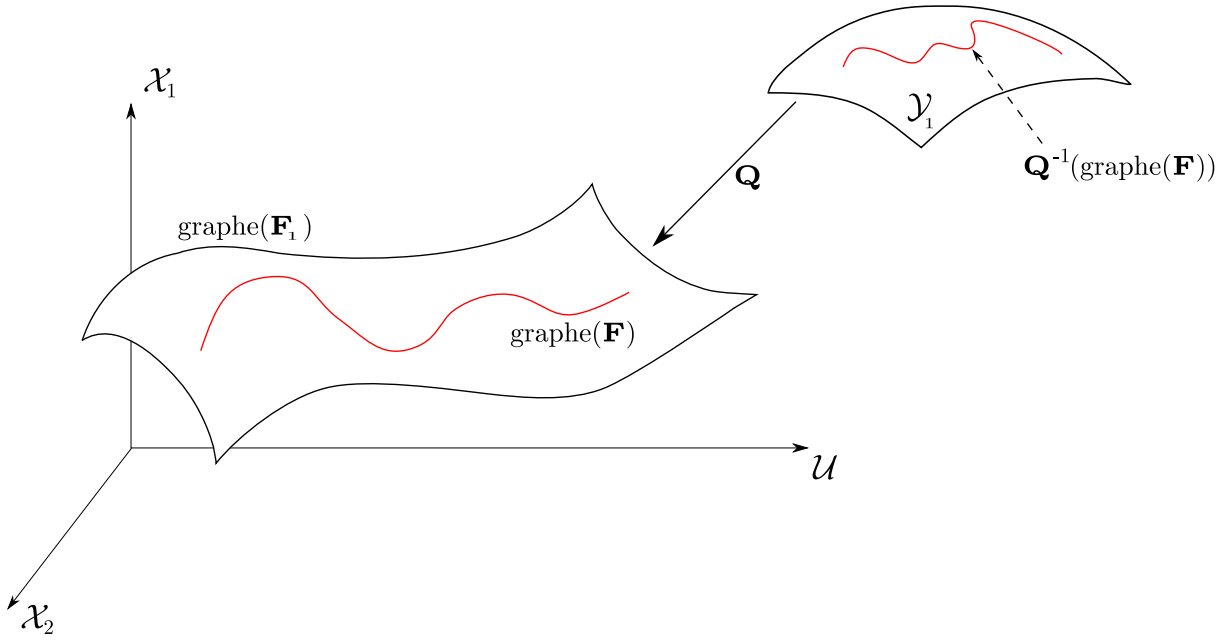


FIG. 5.5 – Représentation d'un paramétrage de sous-système.

Si de plus \mathbf{Q}_1 est un homéomorphisme entre \mathcal{Y}_1 et $\text{graphe}(\mathbf{F}_1)$, il réalise, par construction, un homéomorphisme entre \mathcal{Y} et $\text{graphe}(\mathbf{F})$: le paramétrage est donc complet. ■

Ainsi, un paramétrage d'un sous-système (S_1) induit trivialement un paramétrage du système complet (S). Notons que ce résultat est en soi purement formel, la variété $\mathcal{Y} = \mathbf{Q}^{-1}(\text{graphe}(\mathbf{F}))$ étant en général inconnue. Ceci suggère un affaiblissement de la notion de paramétrage, dans l'optique d'une résolution partielle du modèle en construisant un paramétrage, indexé par x_2 , du sous-modèle $\Phi_1 = 0$ (i.e. de $\text{graphe}(\mathbf{F}_1)$).

La notion de “paramétrisation partielle” centrée sur un *sous-modèle*¹⁰ de $\Phi = 0$ et dont le principe formel est décrit ci-après, permet de résoudre partiellement un modèle, à défaut de pouvoir le résoudre totalement par paramétrage.

Définition 5.32 Le couple $(\mathbf{Q}_1, \mathcal{Y}_1)$ est un paramétrage partiel du système $(\Phi_1, \Phi_2)^T = 0$ si et seulement si :

- $(\mathbf{Q}_1, \mathcal{Y}_1)$ est un paramétrage du sous-système $\Phi_1 = 0$,
- il existe une variété \mathcal{Y} telle que $\mathcal{Y}_1 \subset \mathcal{Y} \times \mathcal{X}_2$.

De manière plus concrète, on considère le modèle (S) précédemment introduit défini par $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)^T$:

$$\begin{cases} \Phi_1(u, x_1, x_2) = 0 \\ \Phi_2(u, x_1, x_2) = 0. \end{cases} \quad (5.18)$$

Les éléments de \mathcal{Y}_1 sont de la forme $y_1 = (x_2, y) \in \mathcal{X}_2 \times \mathcal{Y}$; on a donc :

$$(u, x_1, x_2) = \mathbf{Q}_1(y_1) = \mathbf{Q}_1(y, x_2) \Rightarrow \Phi_1(u, x_1, x_2) = 0.$$

¹⁰Supposé bien posé.

En posant :

$$\tilde{\Phi}_2(x_2, y) := \Phi_2 \circ \mathbf{Q}_1(y, x_2),$$

on obtient donc le “modèle partiellement résolu” :

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}_2(y, x_2) = 0 \\ (u, x_1, x_2) = \mathbf{Q}_1(y, x_2), \end{cases} \quad (5.19)$$

tel que si (y, x_2) est solution de (5.19), alors (u, x_1, x_2) est solution de (5.18). Après paramétrisation partielle, les variables de modèle sont donc y et x_2 , le modèle étant réduit à $\tilde{\Phi}_2 = 0$ et l’opérateur \mathbf{Q}_1 apparaissant comme un simple opérateur de sortie. Ainsi, le problème dynamique (5.1a-5.1b) est ramené à :

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}_2(y, x_2) = 0 \\ \tilde{\mathbb{P}}(y, x_2) = 0, \end{cases} \quad (y, x_2) \in \mathcal{Y}_1.$$

Enfin, considérons l’opérateur $\tilde{\mathbf{F}}_2$ (implicite) donnant la solution de $\tilde{\Phi}_2 = 0$, c’est-à-dire : $x_2 = \tilde{\mathbf{F}}_2(z) \Leftrightarrow \tilde{\Phi}_2(y, x_2) = 0$. On a alors :

Proposition 5.33 $(\mathbf{Q}_1, \text{graphe}(\tilde{\mathbf{F}}_2))$ est un paramétrage de $\Phi = 0$.

Preuve. $\forall y_1 \in \text{graphe}(\tilde{\mathbf{F}}_2), (u, x_1, x_2) = \mathbf{Q}_1(y_1, \tilde{\mathbf{F}}_2(y_1)) \Rightarrow \Phi(u, x_1, x_2) = 0$. ■

En d’autres termes, c’est la résolution de la partie non résolue de (5.19), à savoir l’équation

$$\tilde{\Phi}_2(y, x_2) = 0,$$

qui détermine une sous-variété de \mathcal{Y}_1 sur laquelle le paramétrage partiel devient un paramétrage du modèle (5.18).

Remarque 5.34 Une autre manière d’aborder la paramétrisation partielle, et, surtout, de la mettre en œuvre concrètement, est de l’interpréter comme une paramétrisation du sous-modèle $\Phi_1 = 0$ indexée par la variable x_2 (en somme une famille de paramétrisation indexée par x_2). En effet, soit $x_2 \in \mathcal{X}_2$ **fixé** ; alors l’opérateur :

$$\mathbf{Q}_1(\cdot, x_2) : \mathcal{Y}_{x_2} \rightarrow \mathcal{Z}$$

où $\mathcal{Y}_{x_2} := (\mathcal{Y} \times \{x_2\}) \cap \mathcal{Y}_1$, est un opérateur de paramétrage pour l’équation (à x_2 fixé) :

$$\Phi_1(u, x_1, x_2) = 0, \quad u \in \mathcal{U}, \quad x_1 \in \mathcal{X}_1,$$

ceci en vertu du fait que $\forall y \in \mathcal{Y}_{x_2}$, on a (par définition du paramétrage partiel) :

$$(u, x_1, x_2) = \mathbf{Q}_1(y, x_2) \Rightarrow \Phi_1(u, x_1, x_2) = 0.$$

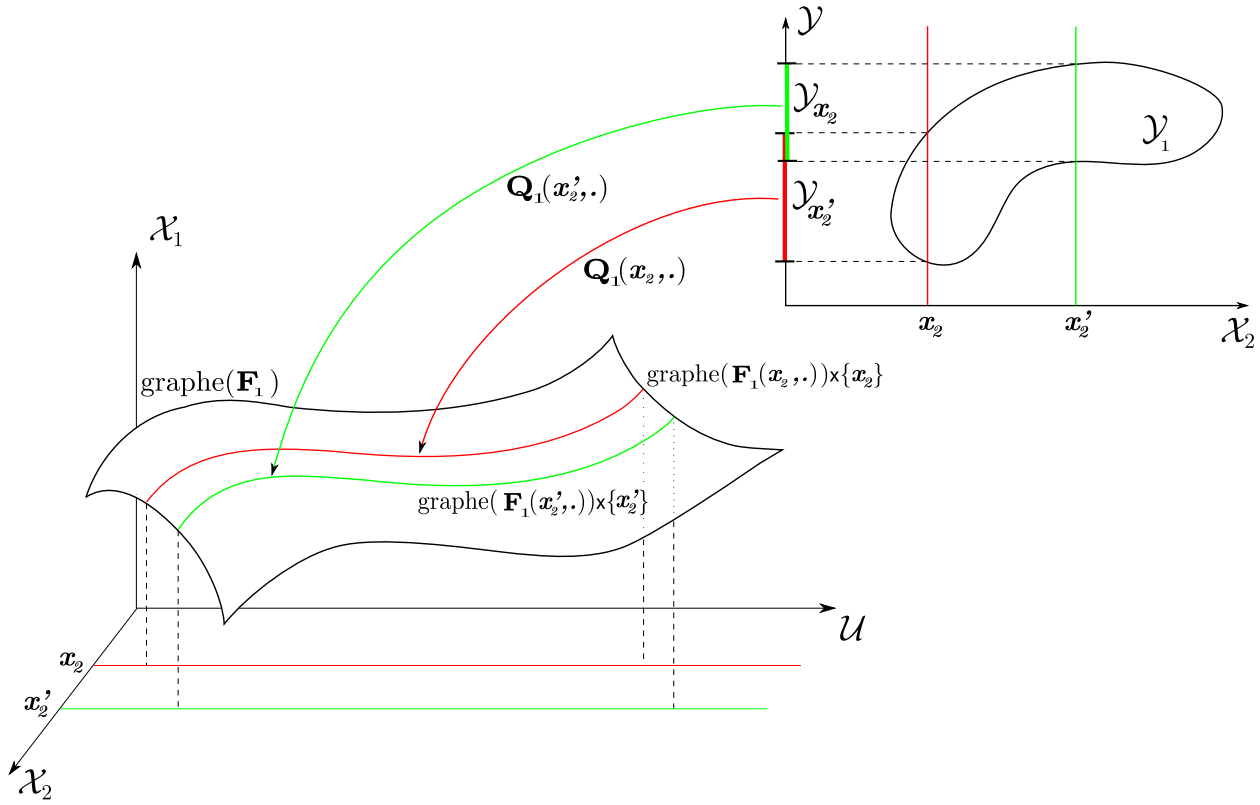


FIG. 5.6 – Représentation des variétés et opérateurs en jeu dans une paramétrisation partielle.

En répétant le processus de paramétrisation partielle sur la partie non résolue de (5.19), on peut ainsi accéder à une paramétrisation non triviale du modèle complet. En effet, considérons $(\tilde{\mathbf{Q}}_2, \mathcal{Y}_2)$ un paramétrage de $\tilde{\Phi}_2 = 0$, soit :

$$\forall y_2 \in \mathcal{Y}_2, (y, x_2) = \tilde{\mathbf{Q}}_2(y_2) \Rightarrow \tilde{\Phi}_2(y, x_2) = 0;$$

alors, on a :

$$\forall y_2 \in \mathcal{Y}_2, (u, x_1, x_2) = \mathbf{Q}_1 \circ \tilde{\mathbf{Q}}_2(y_2) \Rightarrow (\Phi_1, \Phi_2)^T(u, x_1, x_2) = 0,$$

c'est-à-dire, en posant $\mathbf{Q} := \mathbf{Q}_1 \circ \tilde{\mathbf{Q}}_2$, le couple $(\mathbf{Q}, \mathcal{Y}_2)$ est un paramétrage de $\Phi = 0$.

Deuxième partie

Applications

Chapitre 6

Analyse d'un modèle singulier de front de flamme sphérique

Sommaire

6.1	Modèle considéré	79
6.2	Transformation du modèle par changement de temps et analyse	80
6.2.1	Changement de temps	80
6.2.2	Analyse du modèle transformé	81
6.2.3	Changements de fréquences	83
6.3	Résultats numériques	84
6.4	Paramétrisation	85

Dans [25], Joulin propose un modèle pour l'évolution d'un front de flamme sphérique ; celui-ci présente plusieurs difficultés : il est non local, implicite et singulier. Ainsi, l'étude et la simulation d'un tel modèle sont des problèmes délicats.

On montre dans ce chapitre qu'une succession de transformations adaptées permet d'éliminer ces problèmes et d'aboutir à des formulations naturelles du modèle, présentant des propriétés intéressantes tant du point de vue de l'analyse que de la simulation numérique, voire du contrôle (non abordé ici).

6.1 Modèle considéré

Le modèle proposé par Joulin pour l'évolution d'un front de flamme sphérique est donné par le système (adimensionnalisé) :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} x \partial_t^{\frac{1}{2}} x = x \ln x + u, & t > 0 \\ x(0^+) = 0, & u \geq 0, x \geq 0, \end{cases} \quad (6.1)$$

x représentant le rayon d'une flamme amorcée par une étincelle décrite par la trajectoire u . Dans [25], les auteurs analysent ce modèle et établissent notamment sa nature bien posé au moyen de techniques basées sur des résultats de type point fixe. La présence combinée d'un opérateur non local d'une part, d'un point singulier d'autre part, rend la simulation et l'analyse d'un tel modèle particulièrement difficile.

Par transformation de ce modèle par représentation diffusive via le contour $\gamma(\xi) = -|\xi|$, on obtient le modèle suivant¹ :

$$\begin{cases} x \partial_t \psi(t, \xi) = -|\xi| \psi + x \ln(x) + u, & \psi(0, \xi) = 0 \\ x = \langle \mu, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi \sqrt{|\xi|}} \psi(\cdot, \xi) d\xi. \end{cases} \quad (6.2)$$

Bien qu'avantageux à plusieurs égards par rapport à (6.1), notamment du point de vue de la construction de schémas numériques du fait de sa nature locale, ce modèle demeure singulier à l'origine, ce qui rend son analyse délicate et conduit en outre à des difficultés numériques, particulièrement au démarrage du processus.

6.2 Transformation du modèle par changement de temps et analyse

6.2.1 Changement de temps

Le modèle (6.2) entre dans le cadre de la section 4.3.3, avec $g(t, u, x) = \frac{1}{x}$. Par la transformation de changement de temps :

$$\mathbf{S}_{\partial_t^{-1} \frac{1}{x}} : v \mapsto \tilde{v} := v \circ \left(\partial_t^{-1} \frac{1}{x} \right)^{-1},$$

on obtient le modèle équivalent à (6.2) :

$$\begin{cases} \partial_\tau \tilde{\psi} = -\tilde{x} |\xi| \tilde{\psi} + \tilde{x} \ln(\tilde{x}) + \tilde{u}, & \tilde{\psi}(0, \xi) = 0 \\ \tilde{x} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi \sqrt{|\xi|}} \tilde{\psi}(\cdot, \xi) d\xi, \end{cases} \quad (6.3)$$

la correspondance entre t et τ étant définie par :

$$\partial_\tau t = \tilde{x}. \quad (6.4)$$

Le modèle (6.3) ne présente plus de singularité à l'origine (il est néanmoins fortement non linéaire à cause de la fonction non lipschitzienne $x \ln x$). Pour cette raison, l'horloge τ se révèle être un temps naturel pour ce système physique. En particulier, lors de simulations numériques, alors que le temps t doit être discrétisé de manière extrêmement fine au voisinage de l'instant initial (à cause de la singularité), une discrétisation uniforme et relativement grossière du temps τ s'avère suffisante, l'horloge propre s'adaptant aux besoins du système. En effet, la relation (6.4) traduit une variation de la vitesse de de l'horloge τ qui est fonction de la valeur du rayon \tilde{x} : celle-ci est plus rapide lorsque x est proche de 0 (i.e. $\Delta\tau$ représente un "petit" intervalle Δt), et plus lente lorsque \tilde{x} grandit (les pas Δt correspondants sont alors plus grands).

Cette horloge présente également l'intérêt de "suivre" l'évolution du système. En effet, si le rayon de la flamme retombe à zéro (i.e. : la flamme s'éteint), le phénomène physique s'arrête brutalement. Lors de simulation en temps t , il est nécessaire d'effectuer cet arrêt manuellement lorsque x devient négatif, contrairement à la simulation en temps propre qui rejette cet instant à l'infini (i.e. $t(\tau)$ n'évolue plus lorsque \tilde{x} tombe à zéro, d'après (6.4)).

¹Le γ -symbole μ de l'opérateur $2\partial_t^{-\frac{1}{2}}$ est dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ et est donné par [35] :

$$\mu(\xi) = \frac{1}{\pi \sqrt{|\xi|}} \geq 0.$$

A noter que la formulation (6.3) a permis notamment de réaliser des simulations numériques précises utilisées pour valider une méthode d'identification introduite dans [9], les simulations du modèle singulier entraînant une erreur d'identification systématique au voisinage de zéro. Certains résultats numériques de simulation sont donnés en section 6.3.

Remarque 6.1 *Le modèle (6.3) peut, au moyen d'un changement de variable, se ramener à l'équation de la chaleur. En effet, en posant :*

$$\begin{aligned} 2\pi\zeta &:= \text{signe}(\xi) \sqrt{|\xi|}, \\ \tilde{\Theta}(\tau, \zeta) &:= \tilde{\psi}(\tau, 4\pi^2\zeta^2), \end{aligned}$$

l'équation (6.3) s'écrit :

$$\partial_\tau \tilde{\Theta} = -4\pi^2\zeta^2 \tilde{\Theta} + \tilde{x} \ln(\tilde{x}) + \tilde{u}, \quad \tilde{\Theta}(0, \zeta) = 0. \quad (6.5)$$

Par application de la transformation de Fourier inverse \mathfrak{F}^{-1} (par rapport à la seconde variable) à (6.5), en notant $\tilde{\theta}(\tau, \cdot) := \mathfrak{F}^{-1} \tilde{\Theta}(\tau, \cdot)$ et z la variable primale de ζ , on obtient l'équation aux dérivées partielle :

$$\partial_\tau \tilde{\theta} = \partial_z^2 \tilde{\theta} + (\tilde{x} \ln(\tilde{x}) + \tilde{u}) \otimes \delta, \quad \tilde{\theta}(0, z) = 0,$$

la relation de sortie donnant \tilde{x} s'exprimant alors² :

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi \sqrt{|\xi|}} \tilde{\psi}(\tau, \xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} 4 \tilde{\psi}(\tau, 4\pi^2\zeta^2) d\zeta \\ &= \int_{\mathbb{R}} 4 \tilde{\Theta}(\tau, \zeta) d\zeta = 4 \tilde{\theta}(\tau, 0). \end{aligned}$$

On a finalement le modèle suivant, basé sur l'équation de la chaleur sur \mathbb{R}_z :

$$\begin{cases} \partial_\tau \tilde{\theta} = \partial_z^2 \tilde{\theta} + (\tilde{x} \ln(\tilde{x}) + \tilde{u}) \otimes \delta, & \tilde{\theta}(0, \cdot) = 0 \\ \tilde{x} = 4 \tilde{\theta}(\tau, 0), \end{cases} \quad (6.6)$$

Cette formulation présente un certain intérêt, tant en termes de facilité de simulation que d'analyse, du fait des propriétés héritées de l'équation de la chaleur.

6.2.2 Analyse du modèle transformé

La formulation (6.3) permet d'envisager de manière simplifiée les problèmes d'existence et d'unicité des solutions du modèle de Joulin au moyen de méthodes classiques de type énergie, en vue de montrer son caractère bien posé. Un début d'étude est proposé dans le paragraphe suivant. Par souci de clarté, dans ce paragraphe on notera x une trajectoire indifféremment exprimée en temps t ou en temps τ .

NB : Le résultat d'unicité qui suit n'est que partiel. L'établissement complet de l'unicité, si cette propriété est vraie, nécessitera une analyse plus détaillée qui fera l'objet de travaux futurs.

On considère la fonctionnelle énergie suivante, définie pour toute solution φ de (6.3) :

$$E_\varphi := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \mu \varphi^2 d\xi \geq 0.$$

Des calculs simples donnent alors :

²La fonction $\tilde{\psi}(\tau, \cdot)$ est paire d'après l'équation (6.3) dont elle est solution.

Proposition 6.2 *Pour toute solution φ de (6.3), on a :*

$$\frac{d}{d\tau} E_\varphi(\tau) = - \int_{\mathbb{R}} x |\xi| \mu \varphi^2 d\xi - x^2 \ln x + u x;$$

En particulier, si $u = 0$, on a :

$$\frac{d}{d\tau} E_\varphi(\tau) \leq 0. \quad (6.7)$$

Ainsi, on a le bilan d'énergie suivant :

$$E_\varphi(\tau) = - \int_0^\tau \left[\int_{\mathbb{R}} x |\xi| \mu \varphi^2 d\xi - x^2 \ln x \right] ds + \int_0^\tau u x ds,$$

où ces termes désignent respectivement l'énergie (libre) de (6.3), l'énergie dissipée et l'énergie fournie au système par \tilde{u} dans l'intervalle $[0, \tau]$.

On considère deux solutions φ_1 et φ_2 de (6.3) :

$$\begin{cases} \partial_\tau \varphi_1 = -x_1 \xi \varphi_1 + x_1 \ln x_2 + u, & \varphi_1(0, \cdot) = 0 \\ x_1 = \int \mu \varphi_1 d\xi, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_\tau \varphi_2 = -x_2 \xi \varphi_2 + x_2 \ln x_2 + u, & \varphi_2(0, \cdot) = 0 \\ x_2 = \int \mu \varphi_2 d\xi; \end{cases}$$

en posant $\phi = \varphi_1 - \varphi_2$, par soustraction, ϕ est solution de :

$$\partial_\tau \phi = -\xi(x_1 \varphi_1 - x_2 \varphi_2) + x_1 \ln x_1 - x_2 \ln x_2, \quad \phi(0, \cdot) = 0.$$

On considère la fonctionnelle :

$$E(\phi) = \frac{1}{2} \int \mu \phi^2 d\xi \geq 0;$$

on a alors :

$$\begin{aligned} \partial_\tau E(\phi) &= \int \phi \partial_\tau \phi d\xi = \int \mu \phi [-\xi(x_1 \varphi_1 - x_2 \varphi_2) + x_1 \ln x_1 - x_2 \ln x_2] d\xi \\ &= \int -\xi \mu (\varphi_1 - \varphi_2) (x_1 \varphi_1 - x_2 \varphi_2) d\xi + (x_1 - x_2) (x_1 \ln x_1 - x_2 \ln x_2); \end{aligned}$$

puisque la fonction f est décroissante, le terme $(x_1 - x_2) (x_1 \ln x_2 - x_2 \ln x_2)$ est négatif lorsque x_1 et x_2 sont suffisamment petits (c'est-à-dire, du fait que x_1 et x_2 sont continues, si τ est suffisamment petit). La négativité de ce terme devrait permettre d'assurer la dissipativité de ϕ (et donc l'unicité de la solution). Cependant, le terme $\int -\xi \mu (\varphi_1 - \varphi_2) (x_1 \varphi_1 - x_2 \varphi_2) d\xi$ n'est pas contrôlable directement et il n'est donc pas garanti, à ce niveau, que $\partial_\tau E(\phi) \leq 0$.

On peut néanmoins établir un résultat partiel ; on considère le problème :

$$\begin{cases} \partial_\tau \varphi = -x \xi \varphi + y \ln y + u, & \varphi(0, \cdot) = 0, \quad \tau > 0 \\ y = \int \mu \varphi d\xi, \end{cases} \quad (6.8)$$

où x est une fonction positive donnée *a priori*. On a alors, avec $\phi = \varphi_1 - \varphi_2$:

$$\partial_\tau E(\phi) = \int \phi \partial_\tau \phi d\xi = \int -\xi \mu x (\varphi_1 - \varphi_2)^2 d\xi + (y_1 - y_2) (y_1 \ln y_1 - y_2 \ln y_2) d\xi \leq 0. \quad (6.9)$$

Lemme 6.3 *La solution de (6.8) existe et est unique.*

Preuve. L'existence de la solution découlera de l'estimation :

$$\partial_\tau E(\varphi) = - \int x \xi \mu \varphi^2 d\xi + y f(y) + y u$$

et d'une analyse par méthode de Galerkin.

L'unicité découle du fait que $E_\phi(\tau = 0) = 0$, ce qui entraîne, d'après (6.9), l'identité :

$$E_\phi \equiv 0$$

au voisinage de $\tau = 0$, d'où $\varphi_2 = \varphi_1$. ■

On en déduit immédiatement par simple manipulation algébrique :

Corollaire 6.4 *Pour toute fonction continue positive x , le problème $\frac{1}{2}x \partial_t^{\frac{1}{2}} y = y \ln y + u$ admet une unique solution.*

Par conséquent, la correspondance (trajectorielle) : $x \mapsto \varphi$ définie par (6.8) est une application ; il en est donc de même pour la correspondance $x \mapsto y = \int \mu \varphi$, cette dernière (c'est un opérateur) étant notée \mathbf{F} . Puisque le problème (6.3) admet une solution (existence), la fonction $x = \int \mu \varphi$ est un point fixe pour \mathbf{F} (c'est-à-dire : $\mathbf{F}(x) = x$).

Corollaire 6.5 *Si \mathbf{F} est contractante³, alors ce point fixe est unique, et par conséquent la solution de (6.3) est unique.*

La preuve complète de l'unicité de la solution de (6.3) peut donc être recherchée via la propriété de contraction de \mathbf{F} (pour une norme quelconque).

Remarque 6.6 *La question de la dépendance continue de la solution aux données, pour démontrer que le problème est bien posé au sens de Hadamard, sera traitée en choisissant les topologies adéquates pour u , x et φ .*

6.2.3 Changements de fréquences

Le contour défini par $\gamma(\xi) = -|\xi|$ étant invariant par homothétie, le théorème 4.25 s'applique et permet d'écrire, après changement de variable, le modèle suivant, exprimé sur le système de coordonnées $(\tau, \eta) = (\tau, \tilde{x}\xi)$

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} \hat{\psi} = -|\eta| \hat{\psi} + \tilde{F}, & \hat{\psi}(0, \eta) = 0 \\ \tilde{x} = \int \nu \hat{\psi} d\eta, \end{cases}$$

avec

$$\sigma_\tau : \xi \mapsto \eta := \tilde{x} \xi \quad \text{et} \quad \nu(\tau, \eta) = \frac{1}{\tilde{x}} \mu\left(\frac{\eta}{\tilde{x}}\right)$$

On constate que l'équation de sortie, *a priori* implicite du fait de la présence de \tilde{x} dans ν , s'écrit ici (on omet les notations $\widehat{(\cdot)}$ afin d'alléger l'écriture) :

$$\tilde{x} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\tilde{x}} \frac{\sqrt{\tilde{x}}}{\pi \sqrt{|\eta|}} \hat{\psi}(\tau, \eta) d\eta,$$

³i.e.lipschitzienne de rapport $k < 1$.

ce qui permet donc d'expliciter l'expression de \tilde{x} :

$$\tilde{x}^{\frac{3}{2}} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi\sqrt{|\eta|}} \widehat{\psi}(\tau, \eta) d\eta = \int \mu \widehat{\psi} d\eta$$

On obtient ainsi le modèle transformé :

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} \widehat{\psi} = -|\eta| \widehat{\psi} + \widetilde{F}, & \widehat{\psi}(0, \eta) = 0 \\ \tilde{x} = \left[\left(\int \mu \widehat{\psi} d\eta \right)^2 \right]^{\frac{1}{3}}, \end{cases} \quad (6.10)$$

dont l'équation dynamique est maintenant *semi-linéaire* au sens où, à hautes fréquences ($\eta \rightarrow +\infty$), le terme dominant du second membre est l'opérateur *linéaire* $\widehat{\psi} \mapsto -|\eta| \widehat{\psi}$. On peut de plus noter que sous cette forme, la réalisation (6.10) restitue de manière naturelle la positivité de \tilde{x} , qui était imposée *a priori* dans le modèle initial proposé par Joulin. Notons que le modèle (6.10) est singulier à l'origine s'il est exprimé en variable d'euler :

$$\begin{cases} \partial_{\tau} \widehat{\psi} - \ln(\tilde{x})' \eta \partial_{\eta} \widehat{\psi} = -|\eta| \widehat{\psi} + \widetilde{F}, & \widehat{\psi}(0, \eta) = 0. \\ \tilde{x} = \int \nu \widehat{\psi} d\eta, \end{cases} \quad (6.11)$$

6.3 Résultats numériques

On présente dans cette section quelques résultats relatifs à la simulation numérique du modèle de Joulin en utilisant d'une part sa formulation diffusive en temps t , et d'autre part la formulation après changement de temps.

Ce modèle présente une bifurcation : selon l'entrée, la flamme peut soit s'éteindre (i.e. le rayon de la flamme retombe à zéro), soit exploser (le rayon de la flamme croît indéfiniment). On présente sur les Figures 6.1a et 6.1b deux types de trajectoires correspondant à chacun de ces situations, obtenues avec $E = 1.7$ et $E = 2$ avec une entrée de la forme $u = E(1 - t)t^{0.3}$.

On compare en Figure 6.1c une simulation du modèle après changement de temps (6.3) et une simulation du modèle singulier (6.2), au démarrage du processus ; la singularité est clairement mise en évidence. Bien que l'intervalle de temps sur lequel la singularité est "visible" puisse sembler court, celle-ci peut se révéler critique, notamment lors d'un processus d'identification du second membre nonlinéaire (ici la fonction \ln) au voisinage de 0. De plus, la singularité à l'origine induit de nombreux problèmes en pratiques, entres autres la nécessité d'initialiser x à une valeur non nulle arbitraire pour "éviter" la singularité, les résultats obtenus étant assez sensibles à ce choix difficilement quantifiable. Le modèle en temps propre ne présente quant à lui aucun de ces problèmes, la trajectoire x est initialisée à 0 et la simulation ne pose aucune difficulté ; en ce sens, le changement de temps a permis de "désingulariser le problème".

Enfin, on peut voir sur la figure 6.1d la correspondance $\tau \mapsto t$ dans le cas d'une flamme qui s'éteint. Cette figure illustre ce qui a été dit précédemment : l'horloge propre suit l'évolution du système, celle-ci étant plus rapide que le temps t au voisinage de la singularité. On peut noter la présence d'une asymptote traduisant un "arrêt" du temps physique t , c'est-à-dire la mort du processus par extinction de la flamme à un instant fini.

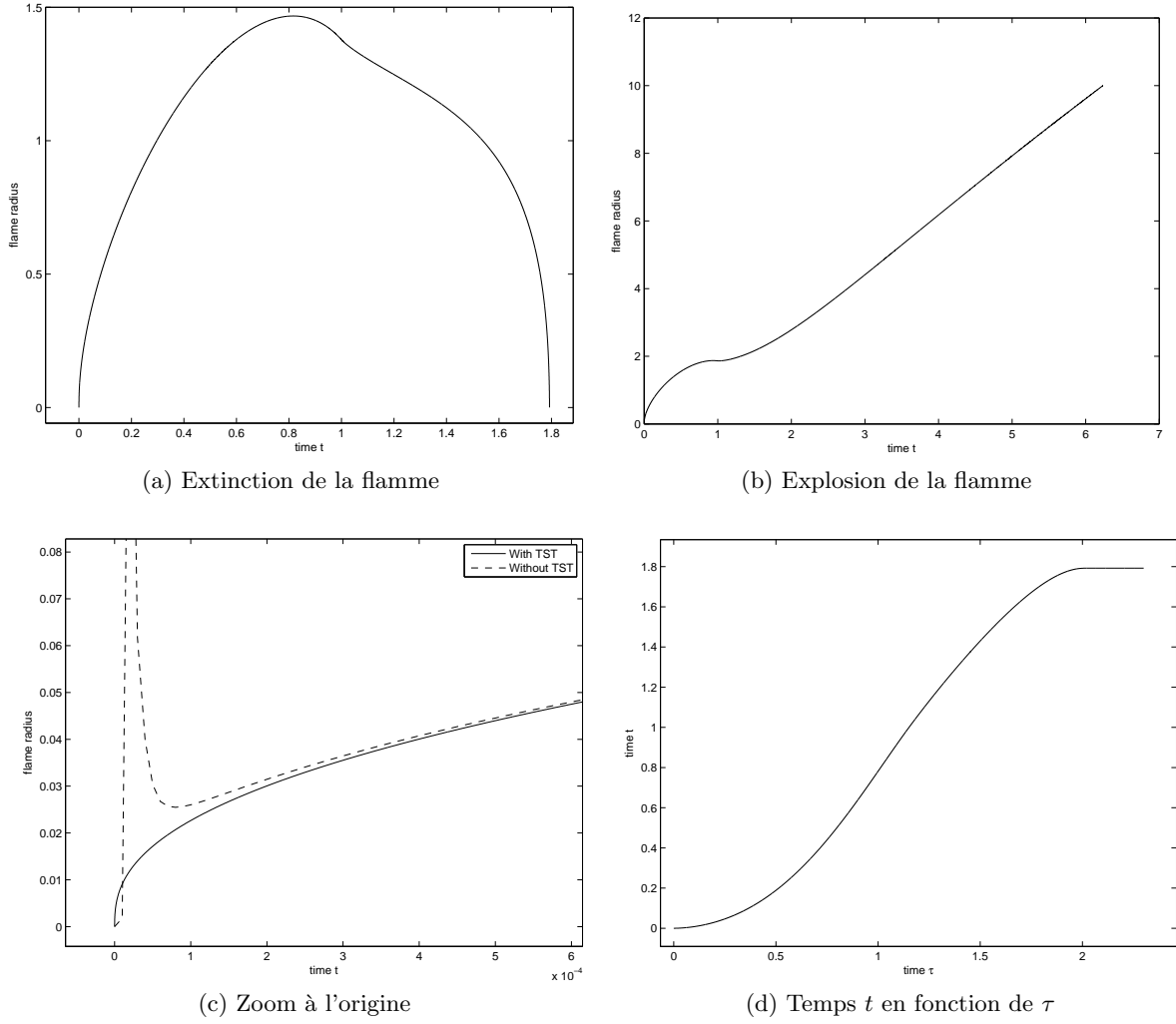


FIG. 6.1 – Résultats obtenus avec et sans changement de temps.

6.4 Paramétrisation

Considérons la sortie sur le modèle (6.1) :

$$y := \partial_t^{-\frac{1}{2}} x; \quad (6.12)$$

on a immédiatement, du fait que $x(0) = 0$:

$$x = \partial_t^{-\frac{1}{2}} y, \quad u = \frac{1}{2} y \partial_t^{-\frac{1}{2}} y - \partial_t^{-\frac{1}{2}} y \ln(\partial_t^{-\frac{1}{2}} y), \quad (6.13)$$

c'est-à-dire qu'à partir d'une trajectoire y choisie dans $\mathcal{Y} = \{\varphi \in C^0([0, T]), \partial_t^{-\frac{1}{2}} \varphi > 0 \text{ t-pp}\}$ par exemple, on déduit par simple application de l'intégrateur $\partial_t^{-\frac{1}{2}}$ et de la fonction \ln , d'une part la commande u recherchée, d'autre part la trajectoire x sans qu'il soit nécessaire d'intégrer l'équation (6.1). On notera qu'un résultat similaire serait obtenu avec $y := x$. Bien évidemment, la simplicité de la paramétrisation découle du fait que l'état $x(t)$ est ici scalaire.

Chapitre 7

Construction de schémas numériques pour une classe d'équations de propagation non locales

Sommaire

7.1	Modèles considérés et leur transformation par représentation diffusive	88
7.2	Construction d'une classe de schémas numériques	89
7.2.1	Discrétisation en ξ	89
7.2.2	Discrétisation en x	90
7.2.3	Stabilité d'une classe de schémas explicites	90
7.3	Application à un modèle de paroi poreuse	92
7.3.1	Modèle considéré	92
7.3.2	Schéma numérique	93
7.3.3	Interprétation physique des conditions de stabilité	93
7.3.4	Résultats numériques	94
7.3.5	Comparaison entre les conditions de stabilité théoriques et expérimentales .	96

Ces dernières années, de nombreux problèmes impliquant des modèles intégro-différentiels ont été étudiés dans des domaines variés. A titre d'exemple, on peut citer [2] en physique, [20, 28, 31] en analyse mathématique ou simulation numérique, [1, 30] en contrôle, [4, 29] en génie électrique, [44] en biologie etc.

Dans le cas de modèles d'évolution spatio-temporels, le problème de simulation au moyen de schémas classiques est souvent extrêmement difficile d'une part à cause du couplage entre des opérateurs de convolution temporelle et les variables spatiales dont le nombre est considérable (le problème étant multidimensionnel), d'autre part par la complexité de traitement numérique par quadrature des intégrales de convolution [6, 49], dont le coût est excessif, et enfin par la difficulté de déterminer une fonctionnelle énergie permettant d'assurer la stabilité par dissipation numérique. La construction systématique de schémas numériques stables et de mise en œuvre simple pour de tels modèles est pour ces raisons un problème complexe, en particulier du fait que les techniques dédiées aux équations aux dérivées partielles classiques, la plupart du temps basées sur des dissipations d'énergies, ne peuvent être directement employées sur des modèles non locaux en temps.

On présente dans ce chapitre certains résultats de travaux publiés dans [10, 11, 12], relatifs à l'analyse et la construction de schémas numériques stables pour une classe d'équations intégral-différentielles de propagation. Sous leur forme initiale, à cause des opérateurs non locaux en temps, ces équations sont mal adaptées à l'analyse et, a fortiori, à la résolution numérique. Comme expliqué dans le chapitre 3, la représentation diffusive permet de transformer ces modèles en des modèles augmentés locaux en temps et de nature diffusive, ces propriétés permettant d'une part de retrouver la possibilité d'utiliser les outils standards dédiés à l'analyse des équations aux dérivées partielles ordinaires et à leur résolution, et d'autre part de construire des schémas numériques économiques grâce à la nature fortement dissipative à haute fréquence des modèles diffusifs (ce dernier point étant crucial s'agissant d'équations spatio-temporelles, donc numériquement complexes).

7.1 Modèles considérés et leur transformation par représentation diffusive

On considère les modèles dynamiques explicites de la forme :

$$H(\partial_t)\varphi = \mathcal{G}\varphi + f, \quad \text{on } \mathbb{R}_t^+ \times \Omega, \quad \Omega \subset \mathbb{R}_x^m, \quad (7.1)$$

où $H(\partial_t)$ est un opérateur convolutif causal diagonal de la forme :

$$H(\partial_t) = \begin{bmatrix} H_1(\partial_t) & & \\ & \ddots & \\ & & H_M(\partial_t) \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

et $\mathcal{G} = G(\nabla)$ est un opérateur différentiel supposé anti auto-adjoint, c'est-à-dire :

$$\mathcal{G}_{ij}^* = -\mathcal{G}_{ji}, \quad (7.3)$$

où \mathcal{G}_{ij}^* est défini par :

$$(\mathcal{G}_{ij} u | v)_{L^2(\Omega)} = (u | \mathcal{G}_{ij}^* v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Des conditions aux limites associées à \mathcal{G} , non spécifiées ici, peuvent compléter le modèle (7.1). Les opérateurs $H_i(\partial_t)^{-1}$ sont supposés γ -diffusifs, de γ -symboles ν_i de type mesures positives (hypothèse physiquement réaliste).

Après transformation par représentation diffusive du modèle (7.1) (cf. chapitre 3), on obtient la formulation augmentée t -locale :

$$\partial_t \psi(t, x, \xi) = \gamma(\xi) \psi(t, x, \xi) + \mathcal{G} \langle \nu, \psi(t, x, \cdot) \rangle + f(t, x), \quad \psi(0, \cdot, \cdot) = 0, \quad (7.4)$$

$$\varphi(t, x) = \langle \nu, \psi(t, x, \cdot) \rangle, \quad (7.5)$$

où $\psi := (\psi_1, \dots, \psi_M)^T$, $\gamma := \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_M)$, $\nu := \text{diag}(\nu_1, \dots, \nu_M)$ et $\langle \nu, \psi \rangle := (\langle \nu_1, \psi_1 \rangle, \dots, \langle \nu_M, \psi_M \rangle)^T$.

Contrairement à la formulation initiale non locale, cette nouvelle formulation permet d'établir aisément le caractère dissipatif du modèle en considérant la fonctionnelle énergie :

$$\psi \mapsto E_\psi := \frac{1}{2} \sum_i \iint \nu_i |\psi_i|^2 d\xi dx = \frac{1}{2} \iint \psi^T \nu \bar{\psi} d\xi dx,$$

qui permet d'établir, grâce à la positivité des mesures ν :

Proposition 7.1 *Pour tout solution ψ de (7.4), et pour tout t tel que $f(t, \cdot) = 0$, la fonctionnelle E_ψ vérifie :*

$$\frac{dE_\psi(t)}{dt} \leq 0. \quad (7.6)$$

De même, alors que la nature non locale de $H(\partial_t)$ rend la résolution numérique directe de (7.1) en général délicate sinon impraticable, le système transformé (7.4) va permettre la construction et l'analyse systématiques de schémas numériques simples et efficaces. Ces schémas sont présentés et étudiés ci-après.

Remarque 7.2 *Grâce à l'estimation a priori (7.6), l'existence et l'unicité de la solution de (7.4) et donc, indirectement, de (7.1), peuvent être envisagées au moyen des méthodes standard de l'analyse des équations aux dérivées partielles.*

7.2 Construction d'une classe de schémas numériques

On remarquera en premier lieu que l'on peut, en se basant sur la relation (7.5), construire des approximations de la solution φ de (7.1) à partir d'approximations $\tilde{\psi}$ de ψ solution de (7.4), sous la forme :

$$\varphi(t_n, x_k) \simeq \varphi(t_n, x_k) = \sum_l \alpha_l \tilde{\psi}(t_n, x_k, \xi_l).$$

Ainsi, le problème se résume à la construction et l'analyse de schémas numériques pour (7.4). On décrit rapidement les étapes de discrétisation en ξ , x , et t , et on énoncera les principaux résultats de stabilité établis pour les schémas obtenus. Plus de détails sur tous ces résultats pourront être trouvés dans [11].

7.2.1 Discrétisation en ξ

On considère un espace de Hilbert \mathcal{K} tel que $\psi(t, x, \cdot) \in \mathcal{K}$, et \mathcal{K}_L une suite de sous-espaces de \mathcal{K} de dimension L , telle que $\overline{\cup_L \mathcal{K}_L} = \mathcal{K}$. étant donné un maillage $\{\xi_l\}_{l=1:L}$, des approximations consistantes $\tilde{\psi}_L \in \mathcal{K}_L$ de ψ sont définies par :

$$\tilde{\psi}_L(\xi) = \sum_{l=1}^L \psi(\xi_l) \Lambda_l(\xi),$$

où Λ_l sont des fonctions d'interpolation appartenant à \mathcal{K}_L et telles que :

$$\left\| \tilde{\psi}_L - \psi \right\|_{\mathcal{K}} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0.$$

On déduit alors une formulation d'état approchée de (7.4), de dimension finie :

$$\partial_t \psi(t, x, \xi_l) = \gamma(\xi_l) \psi(t, x, \xi_l) + \mathcal{G} \sum_j C_j \psi(t, x, \xi_j), \quad l = 1 : L, \quad (7.7)$$

où :

$$C_l = \text{diag}(c_{l1}, \dots, c_{lM}), \quad c_{li} := \int \nu_i(\xi) \Lambda_l(\xi) d\xi.$$

En pratique, grâce à la nature diffusive de (7.4), seules quelques dizaines de points ξ_l sont en général nécessaires pour approcher la réponses fréquentielle de chaque opérateur $H_i(\partial_t)^{-1}$ sur une bande fréquentielle de plusieurs décades.

On suppose, par souci de consistance avec la positivité des mesures ν_i , que :

$$c_{li} \geq 0;$$

typiquement, cette propriété, qui joue un rôle central dans la suite, est satisfaite si $\Lambda_l \geq 0$. On peut alors construire la fonctionnelle énergie associée à (7.7) :

$$E_\psi^L(t) = \frac{1}{2} \sum_{i,l} \int c_{li} |\psi_i(t, x, \xi_l)|^2 dx = \frac{1}{2} \sum_l \int \psi(t, x, \xi_l)^T C_l \overline{\psi(t, x, \xi_l)} dx$$

qui vérifie :

$$\frac{dE_\psi^L(t)}{dt} \leq 0. \quad (7.8)$$

7.2.2 Discrétisation en x

Dans la formulation (7.7), \mathcal{G}_{ij} est un opérateur différentiel, que l'on approche sur un maillage $\{x_k\}_{k=1:K} \subset \mathbb{R}^m$ par :

$$(\mathcal{G}_{ij}\varphi)(x_q) \simeq \sum_{k=1}^K g_{ij}^{qk} \varphi(x_k), \quad \forall q = 1 : K \quad (7.9)$$

où les coefficients g_{ij}^{qk} définissent l'approximation spatiale considérée (citons à titre d'exemple les différences finies [43], les éléments finis ou de manière plus générale les méthodes de Galerkin [14], à d'éventuelles adaptations techniques près). En notant $\tilde{\varphi} := (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_K))^T$, (7.9) peut être écrit de manière synthétique :

$$((\mathcal{G}_{ij}\varphi)(x_1), \dots, (\mathcal{G}_{ij}\varphi)(x_K))^T \simeq G_{ij}\tilde{\varphi},$$

où G_{ij} désigne la matrice de termes g_{ij}^{qk} . Dans la suite, on notera par simplicité φ en lieu de $\tilde{\varphi}$.

L'opérateur \mathcal{G} étant anti auto-adjoint, il est naturel de considérer des approximations respectant cette propriété ; ainsi, la matrice-bloc G , dont les éléments $G_{ij} \in \mathcal{M}_{K,K}(\mathbb{R})$, doit être anti-symétrique, soit :

$$G_{ij}^T = -G_{ji}. \quad (7.10)$$

Dans la suite, $S_{G_{ij}}$ désigne la quantité :

$$S_{G_{ij}} := \max \left(\max_k \sum_q |g_{ij}^{qk}|, \max_q \sum_k |g_{ij}^{qk}| \right).$$

7.2.3 Stabilité d'une classe de schémas explicites

En se basant sur la formulation semi-discrétisée en ξ et x , on propose une classe de schémas numériques explicites à deux pas de la forme :

$$\psi_i^{n+1}(\xi_l) = a_{li} \psi_i^{n-1}(\xi_l) + b_{li} \sum_k G_{ik} \sum_j b_{jk} \psi_k^n(\xi_j) + b_{li} f_i^n \quad (7.11)$$

où les coefficients $a_{li} \in \mathbb{C}$, $|a_{li}| < 1$ et $b_{jk} \in \mathbb{R}_+^*$ dépendent du choix de la discrétisation temporelle et du choix des $\gamma_i(\xi_l)$, et G est la matrice anti-symétrique associée à l'opérateur \mathcal{G} . On considère alors la quantité :

$$E^n = \sum_{i,l} \|\psi_i^n(\xi_l)\|_2^2 + \text{Re} (\psi_i^{n+1}(\xi_l) \overline{\psi_i^{n-1}(\xi_l)}).$$

La structure du schéma numérique étant choisie, le problème dynamique considéré consiste simplement à établir la convergence de la solution approchée vers la solution exacte lorsque les pas de discrétisation tendent vers 0. On suppose que la discrétisation spatiale a été choisie telle que la consistance de (7.11) soit établie (tel est le cas, par exemple, en utilisant des différences finies). On s'intéresse donc à la stabilité de cette classe de schémas.

Lemme 7.3 *Si*

$$\operatorname{Re}(a_{li}) - \frac{b_{li}}{2} \sum_{k,j} b_{jk} S_{G_{ik}} > 0 \quad \forall i, l, \quad (7.12)$$

alors il existe $K > 0$ tel que :

$$E^n \geq K \sum_{i,l} \|\psi_i^n(\xi_l)\|^2.$$

Remarque 7.4 ► On remarquera que la condition (7.12) implique nécessairement $\operatorname{Re}(a_{li}) > 0$; l'hypothèse $|a_{li}| < 1$ est motivée par le terme $a_{li} \psi_i^{n-1}(\xi_l)$ de (7.11).

► Les conditions (7.12) sont des conditions nécessaires qui lient Δt (présent dans a_{li} et b_{ik}) et le pas de discrétisation spatiale (présent dans $S_{G_{ik}}$).

On considère alors la quantité :

$$\mathcal{E}^n = E^n + E^{n-1},$$

qui, sous les conditions du lemme 7.3, est un candidat à une énergie pour (7.11). On montre alors le théorème suivant pour la stabilité de la classe de schémas explicites (7.11) :

Théorème 7.5 *Sous les conditions du lemme 7.3 et si, pour tout k, j ,*

$$|a_{jk}|^2 + \frac{b_{jk}}{2} \sum_{i,l} \|G_{ik}\|^2 b_{li} \left(|a_{li}|^2 + a_{li}^2 - \overline{a_{jk}} a_{li} - 1 \right) + b_{li} \sum_{p,q} b_{qp} (|a_{li} - \overline{a_{jk}}| + |a_{li} - \overline{a_{qp}}|) \leq 1 \quad (7.13)$$

et

$$\operatorname{Re}(a_{jk})(|a_{jk}|^2 - 1) + \frac{b_{jk}}{2} \sum_{i,l} b_{li} \left(|a_{jk}|^2 + a_{jk}^2 - \overline{a_{li}} a_{jk} - 1 \right) \leq 0, \quad (7.14)$$

alors le schéma (7.11) est stable.

Remarque 7.6 On trouvera dans [11] une analyse de stabilité pour une classe de schémas implicites inconditionnellement stables basés sur une discrétisation en temps de type Crank-Nicholson.

Dans la section 7.3, on considère un schéma explicite particulier de la forme (7.11) basé sur une discrétisation en temps classique :

$$\psi_i^{n+1}(\xi_l) = (1 + 2\Delta t \gamma_i(\xi_l)) \psi_i^{n-1}(\xi_l) + 2\Delta t \sum_k G_{ik} \sum_j c_{jk} \psi_k^n(\xi_j) + 2\Delta t f_i^n$$

qui, après le changement de variable $\tilde{\psi}_i^{n+1}(\xi_l) = \psi_i^{n+1}(\xi_l) \sqrt{\frac{c_{li}}{2\Delta t}}$, se met sous la forme (7.11) avec :

$$a_{li} = 1 + 2\Delta t \gamma_i(\xi_l) \text{ et } b_{jk} = \sqrt{2\Delta t c_{jk}}. \quad (7.15)$$

7.3 Application à un modèle de paroi poreuse

7.3.1 Modèle considéré

Dans le contexte de réduction des nuisances sonores dans l'industrie aéronautique, un matériau poreux a été proposé dans [19] pour l'absorption d'une part conséquente de l'énergie des ondes acoustiques incidentes. Le modèle fréquentiel suivant a été établi :

$$\begin{cases} e i\omega \rho_{\text{eff}}(i\omega) \hat{u} + \partial_x \hat{P} = 0 \\ e i\omega \chi_{\text{eff}}(i\omega) \hat{P} + \partial_x \hat{u} = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \rho_{\text{eff}}(i\omega) = \rho \left(1 + a \frac{\sqrt{1+b i\omega}}{i\omega}\right) \\ \chi_{\text{eff}}(i\omega) = \chi \left(1 - \beta \frac{i\omega}{i\omega + a' \sqrt{1+b' i\omega}}\right), \end{cases} \quad (7.16)$$

où \hat{u} et \hat{P} désignent les transformées respectives de la vitesse et de la pression à l'intérieur du milieu poreux, e désigne l'épaisseur du milieu poreux¹, $\rho_{\text{eff}}(i\omega)$ et $\chi_{\text{eff}}(i\omega)$ sont respectivement la densité de Pride et *al.* [39] et la compressibilité effective de Lafarge [27], et $\rho = \rho_0 \alpha_\infty$, $\chi = \frac{1}{P_0}$, $a = \frac{8\mu}{\rho_0 \Lambda^2}$, $a' = \frac{8\mu}{\rho_0 \Lambda'^2}$, $b = \frac{1}{2a}$, $b' = \frac{1}{2a'}$, $0 < \beta = \frac{\gamma-1}{\gamma} < 1$.

Dans le domaine temporel, (7.16) peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} H_1(\partial_t) & 0 \\ 0 & H_2(\partial_t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ P \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\partial_x \\ -\partial_x & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ P \end{pmatrix} \quad (7.17)$$

avec :

$$H_1(p) = e \rho (p + a \sqrt{1 + b p}) \text{ and } H_2(p) = e p \chi \left(1 - \beta \frac{p}{p + a' \sqrt{1 + b' p}}\right).$$

Ce modèle est différentiel en espace et pseudo-différentiel en temps. Les prolongements analytiques des fonctions $H_1(p)^{-1}$ et $H_2(p)^{-1}$ sont clairement décroissants à l'infini et holomorphes dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. La formulation (7.4) de (7.17), avec $\gamma_i(\xi) = -|\xi|$, prend la forme

$$\begin{cases} \partial_t \psi(t, x, \xi) = \begin{bmatrix} -\xi & 0 \\ 0 & -\xi \end{bmatrix} \psi(t, x, \xi) + \begin{bmatrix} 0 & -\partial_x \\ -\partial_x & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \langle \nu_1, \psi_1(t, x, \cdot) \rangle \\ \langle \nu_2, \psi_2(t, x, \cdot) \rangle \end{pmatrix} \\ u = \langle \nu_1, \psi_1(t, x, \cdot) \rangle \\ P = \langle \nu_2, \psi_2(t, x, \cdot) \rangle. \end{cases} \quad (7.18)$$

Après calculs, les γ -symboles ν_i associés aux opérateurs $H_i(\partial_t)^{-1}$ s'expriment :

$$\begin{aligned} \nu_1(\xi) &= \frac{a}{\pi e \rho} \frac{\sqrt{b\xi - 1}}{\xi^2 + \frac{a\xi}{2} - a^2} \mathbf{1}_{\xi > 2a} + k_1 \delta(\xi - \xi_1), \\ \nu_2(\xi) &= \frac{a' \beta}{\pi e \chi} \frac{\sqrt{b'\xi - 1}}{\xi^2 (1 - \beta)^2 + \frac{a'\xi}{2} - a'^2} \mathbf{1}_{\xi > 2a'} + \frac{1}{e \chi} \delta(\xi) + k_2 \delta(\xi - \xi_2), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{a(\sqrt{17}-1)}{4} > 0, \quad \xi_2 = \frac{a'(\sqrt{1+16(1-\beta)^2}-1)}{4(1-\beta)^2} > 0, \\ k_1 &= \frac{\sqrt{17}-1}{e \rho \sqrt{17}} > 0, \quad \text{et } k_2 = \frac{\beta(\sqrt{1+16(1-\beta)^2}-1)}{e \chi (1-\beta) \sqrt{1+16(1-\beta)^2}} > 0; \end{aligned}$$

Les γ -symboles sont clairement positifs.

La discrétisation en ξ est basée sur les fonctions d'interpolations classiques :

$$\Lambda_l(\xi) = \frac{\xi - \xi_{l-1}}{\xi_l - \xi_{l-1}} \mathbf{1}_{[\xi_{l-1}, \xi_l]}(\xi) + \frac{\xi_{l+1} - \xi}{\xi_{l+1} - \xi_l} \mathbf{1}_{[\xi_l, \xi_{l+1}]}(\xi)$$

et les coefficients c_{li} sont calculés par simples quadratures de $\int \nu_i(\xi) \Lambda_l(\xi) d\xi$.

¹Dans le modèle, l'unité de longueur pour x est e , donc $x \in]0, 1[$.

7.3.2 Schéma numérique

Dans cet exemple, $\mathcal{G} = \begin{bmatrix} 0 & -\partial_x \\ -\partial_x & 0 \end{bmatrix}$. On utilise une approximation de type différences-finies centrées pour approcher l'opérateur ∂_x ; ainsi, la matrice (anti-symétrique) G de discrétisation en x est donnée par :

$$G = \begin{bmatrix} 0 & G_{12} \\ G_{21} & 0 \end{bmatrix} \text{ avec } G_{12} = G_{21} = \frac{1}{2\Delta x} \begin{bmatrix} 0 & -1 & & & \\ 1 & 0 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & -1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On considère alors le schéma explicite particulier présenté précédemment :

$$\begin{cases} \psi_1^{n+1}(\xi_l) = a_{li} \psi_1^{n-1}(\xi_l) + b_{l1} G_{21} \sum_j b_{j2} \psi_2^n(\xi_j) + b_{l1} f_1^n \\ \psi_2^{n+1}(\xi_l) = a_{li} \psi_2^{n-1}(\xi_l) + b_{l2} G_{12} \sum_j b_{j1} \psi_1^n(\xi_j) + b_{l2} f_2^n, \end{cases} \quad (7.19)$$

avec

$$a_{li} = 1 - 2\Delta t \xi_l, \quad b_{jk} = \sqrt{2\Delta t c_{jk}}.$$

7.3.3 Interprétation physique des conditions de stabilité

Une condition de stabilité bien connue pour l'équation des ondes est que la vitesse de propagation numérique $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ soit au moins égale à la vitesse de propagation physique des ondes acoustiques. Il paraîtrait donc naturel que les conditions de stabilité établies en section 7.2.3 restituent dans le cas présent cette propriété. Plus précisément : la condition suffisante pour (7.19) est-elle "optimale" au sens proche de la condition nécessaire mentionnée ci-dessus ? On expose brièvement les résultats de l'étude menée à ce sujet dans [11].

On peut montrer qu'à hautes fréquences, le modèle (7.17) se comporte comme l'équation $\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u$ avec :

$$c = \sqrt{\int \nu_1(\xi) d\xi \int \nu_2(\xi) d\xi}.$$

De manière similaire, on montre que le modèle obtenu après discrétisation en ξ de (7.17) se comporte à hautes fréquences comme l'équation $\partial_t^2 u = c_d^2 \partial_x^2 u$ avec :

$$c_d = \sqrt{\sum_j c_{j1} \sum_j c_{j2}}.$$

On montre alors sans difficulté que, lorsque l'approximation \tilde{H}_i^{-1} est suffisamment proche de H_i^{-1} , on a :

$$c_d \simeq c. \quad (7.20)$$

Enfin, on montre que la condition du paragraphe 7.2.3 appliquée au schéma (7.19) s'exprime :

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} > v_d := \max_{(i,k)} \max_l \frac{\sqrt{c_{li}}}{1 - 2\Delta t \xi_l} \sum_j \sqrt{c_{jk}} \geq c_d \quad (7.21)$$

où $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ est la vitesse numérique du schéma. On en déduit donc, comme attendu, que la vitesse de propagation numérique doit satisfaire :

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} > c_d.$$

Les résultats obtenus en simulation numérique tendent à montrer que cette condition nécessaire est en fait quasi suffisante.

7.3.4 Résultats numériques

On présente dans ce paragraphe quelques résultats numériques obtenus avec le schéma numérique précédemment étudié. Les valeurs des paramètres physiques choisies sont [19] :

$$\begin{aligned} \Lambda = \Lambda' &= 0.1 \cdot 10^{-3} \text{ m}, \quad \rho_0 = 1.2 \text{ kg.m}^{-3}, \quad P_0 = 10^5 \text{ Pa} \\ \mu &= 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}, \quad \gamma = 1.4, \quad \alpha_\infty = 1.3, \quad e = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Les réponses fréquentielles des approximations des opérateurs $H_i(\partial_t)^{-1}$ sont données en figure 7.1 : moins d'une vingtaine de points de discrétisation ξ_l ont été nécessaires pour obtenir une bonne précision sur 6 décades.

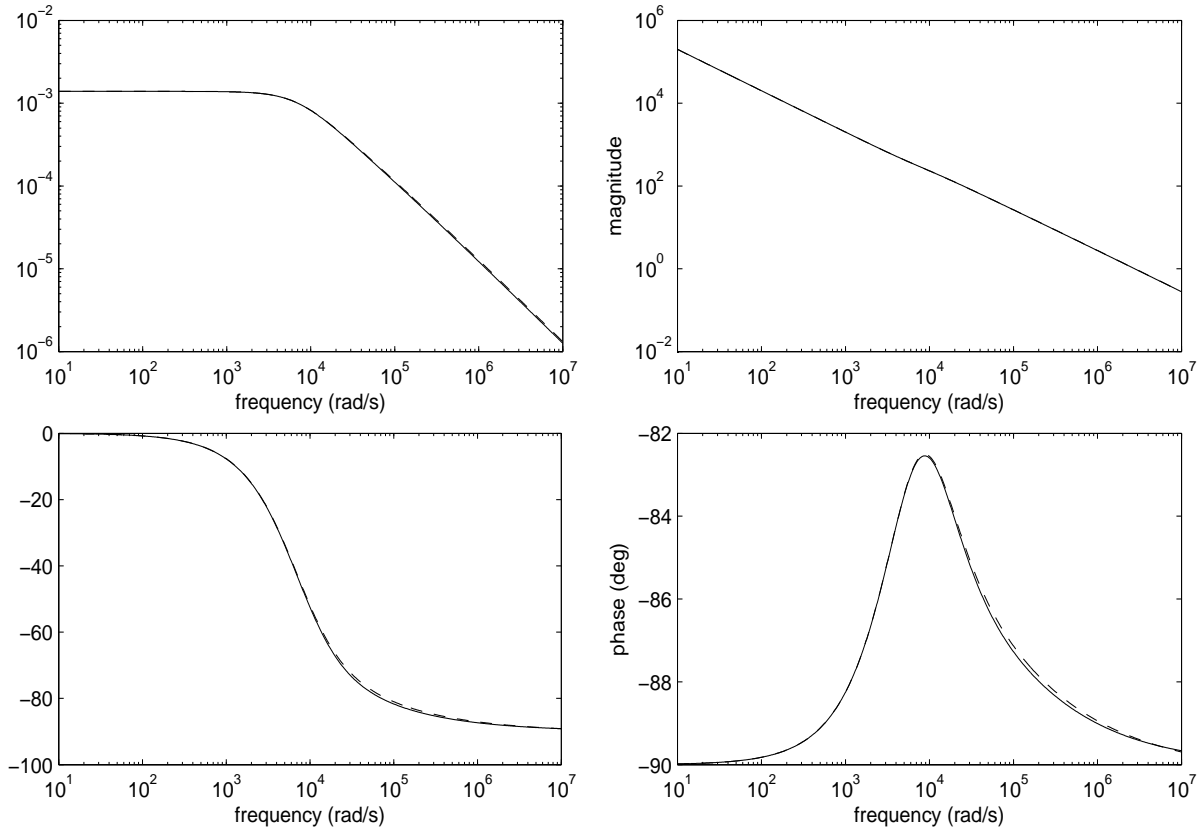


FIG. 7.1 – Réponses fréquentielles exactes (—) et approchées (- -) des opérateurs $H_1(\partial_t)^{-1}$ (à gauche) et $H_2(\partial_t)^{-1}$ (à droite).

Pour illustration, l'évolution de la pression P est donnée en figure 7.2 ; le domaine spatial de (7.17) est $\Omega =]0, 1[$ et les conditions aux limites choisies sont :

$$P(t, 0) = (1 - \cos(2\pi f t)) \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{f}]}(t), \quad u(t, 1) = 0,$$

avec $f = 5$ kHz. On observe clairement la dissipation et la dispersion dues à l'opérateur $H(\partial_t)$. On présente en figure 7.3 les fonctions ψ_1 , impliquées dans la synthèse de u à un instant donné.

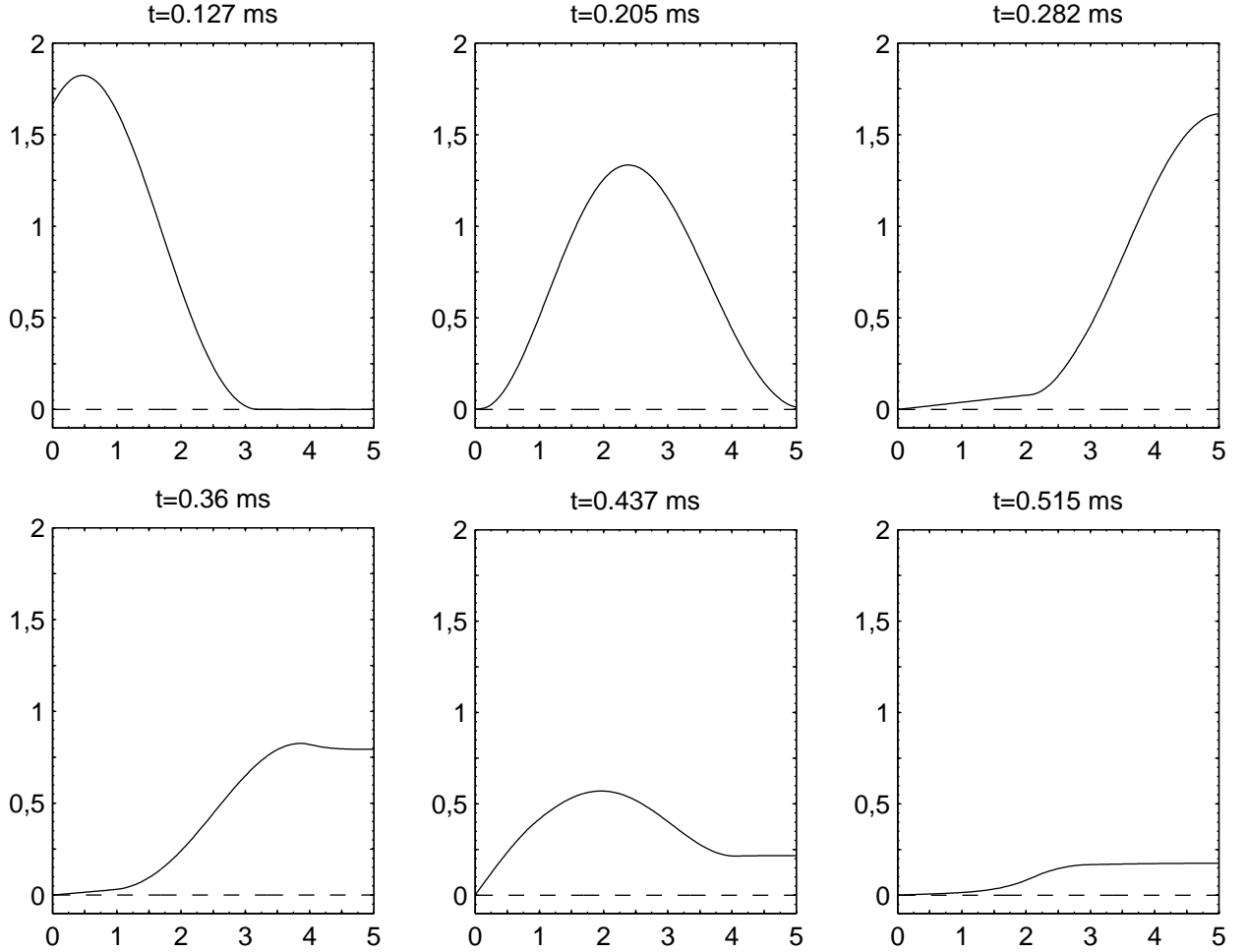
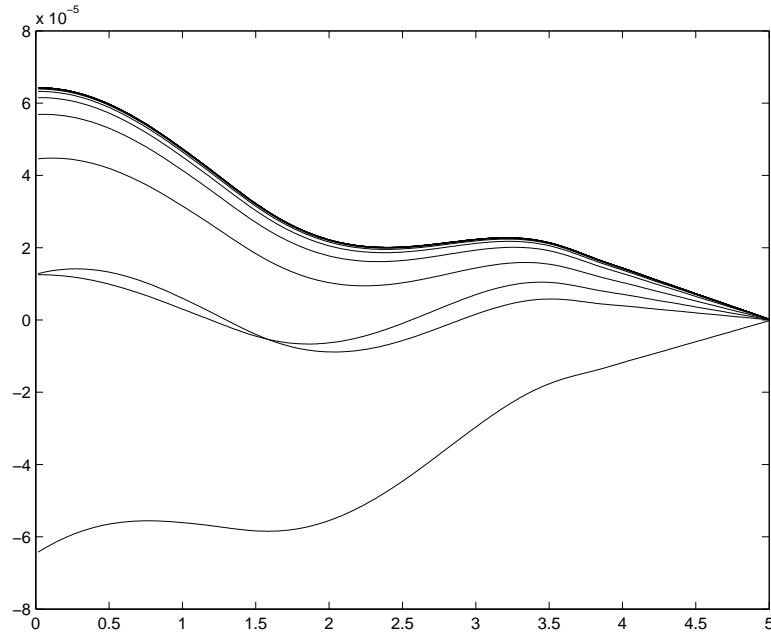


FIG. 7.2 – Evolution de $\tilde{P} = \sum_l b_{l2} \psi_2(\xi_l)$ (N.B : l'unité de longueur sur l'axe est 10^{-2}m).

Remarque 7.7 On étudie dans [10] le couplage du milieu poreux avec un milieu fluide, en montrant notamment, du fait de la dissipativité établie de manière générale dans la proposition 7.1, la dissipativité du système couplé. On peut également résumer le milieu poreux à son interaction à l'interface avec le milieu fluide, en tant qu'opérateur d'impédance de la paroi poreuse $Q(\partial_t) : P(t, 0) \mapsto u(t, 0)$, donné par l'expression :

$$Q(\partial_t) = \sqrt{\frac{\chi_{\text{eff}}(\partial_t)}{\rho_{\text{eff}}(\partial_t)}} \tanh \left(e(x) p \sqrt{\chi_{\text{eff}}(\partial_t) \rho_{\text{eff}}(\partial_t)} \right),$$

opérateur que l'on peut réaliser simplement par représentation diffusive. Plus de détails sont disponibles dans [10].

FIG. 7.3 – Fonctions $\psi_1(t, \cdot, \xi_l)$ $l = 1 : L$ à l'instant $t = 1.3$ ms.

7.3.5 Comparaison entre les conditions de stabilité théoriques et expérimentales

Les conditions de stabilité données en section 7.2.3 sont :

- condition 1. Δt suffisamment petit,
- condition 2. $a_{li} - \frac{b_{li}}{2\Delta x} \sum_k b_{kj} > 0$.

On teste ci-après expérimentalement la condition de stabilité 2, en examinant la stabilité du schéma selon les valeurs de $\frac{\Delta t}{\Delta x}$. Les résultats figurent dans le tableau 7.1 ; celle-ci confirme tout d'abord que la condition 2 est bien une condition suffisante de stabilité. De plus, on peut noter que l'intervalle de valeurs de $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ pour lesquelles le schéma reste stable alors que la condition 2 n'est pas vérifiée est petit ; en ce sens, la condition 2 est en fait “presque nécessaire”.

valeur de $\Delta t/\Delta x$	condition 2	Stabilité
$\leq 1.47 \cdot 10^{-4}$	vérifiée	oui
de $1.48 \cdot 10^{-4}$ à $1.97 \cdot 10^{-4}$	non vérifiée	oui
$\geq 1.98 \cdot 10^{-4}$	non vérifiée	non

TAB. 7.1 – Stabilité constatée du schéma numérique.

Enfin, en relation avec la section 7.3.3, on peut noter que les valeurs numériques des bornes de stabilité de la table sont intimement liées aux vitesses de propagation des ondes. En effet, les calculs des vitesses propagation données dans le paragraphe 7.3.3 donnent (en unité de longueur e par seconde) :

$$c = 5992, c_d = 5038 \text{ et } v_d = 6856,$$

soit, d'après les valeurs des coefficients physiques (7.22), les vitesses de propagation physiques

$$c = 299.6 \text{ m.s}^{-1}, c_d = 251.9 \text{ m.s}^{-1} \text{ et } v_d = 342.8 \text{ m.s}^{-1}.$$

Or, dans le tableau 7.1, on constate que le schéma devient instable lorsque

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \leq \frac{1}{1.98 \cdot 10^{-4}} \simeq c_d,$$

soit lorsque la vitesse de propagation numérique devient inférieure à la vitesse de propagation haute fréquence du modèle.

Chapitre 8

Paramétrisation et contrôle d'un modèle de bioréacteur

Sommaire

8.1	Modèle de bioréacteur fed-batch	100
8.2	Paramétrisation du modèle	101
8.2.1	Transformation par changement de temps dynamique	101
8.2.2	Équation paramétrique associée au modèle	101
8.2.3	Illustration du paramétrage du modèle	103
8.3	Asservissement du modèle paramétré	104
8.3.1	Asservissement de la biomasse	104
8.3.2	Asservissement du substrat et du produit	107
8.3.3	Robustesse aux bruits de mesure	108
8.3.4	Compensation de perturbation	110
8.3.5	Bruit et recalage de modèle à intervalles réguliers	113
8.4	Suivi de trajectoire pour le modèle paramétré	114
8.4.1	Construction du correcteur et résultats	114
8.4.2	Contrôleur passif par recalage de modèle	115
8.5	Extension du paramétrage à une classe de modèles plus large	116

Le contrôle des processus de fermentation constitue une problématique qui a donné lieu à de nombreuses études depuis plusieurs décennies. La complexité des phénomènes biologiques et physiques sous-jacents en fait un problème délicat, que ce soit à cause des imperfections inévitables des modèles qui peuvent être considérables, des perturbations, et, enfin, des non-linéarités fortes impliquées dans les équations d'évolution de tels processus. Diverses approches ont été développées pour aborder cette vaste classe de problèmes dynamiques. La plupart sont basées, classiquement, sur les qualités prédictives des modèles [47, 36, 38, 40]. D'autres proposent, s'appuyant sur l'argument de la nature très imparfaite des modèles en matière de biologie ou biochimie, des stratégies moins (parfois pas du tout) contraignantes au sens où le modèle est peu déterminant, basées par exemple sur des réseaux de neurones, la dynamique floue, etc. [41, 50].

On montre dans ce chapitre comment des transformations opératoriels adéquates et une paramétrisation bien choisie conduisent à une reformulation du problème sous une forme particulièrement simple et bien adaptée à l'analyse et à la construction de stratégies de commande originales,

qui sont ensuite testées en simulation numérique. Plusieurs problèmes sont abordés : asservissement, planification et suivi de trajectoire, ainsi qu'un moyen de compensation de perturbation par modification de paramétrage.

L'objectif de cette étude n'est pas la comparaison avec d'autres méthodes déjà éprouvées, parfois de longue date, mais simplement, dans un premier temps, d'illustrer par un exemple significatif l'intérêt des notions introduites dans la première partie de la thèse. Certains de ces résultats ont été publiés dans [33, 34].

Une extension de la paramétrisation à quelques généralisations formelles du modèle de bioréacteur est brièvement présentée en fin de chapitre, à seule fin, là encore, d'illustrer sur quelques exemples non triviaux et concrets les possibilités de transformations opératoires présentées dans la première partie.

8.1 Modèle de bioréacteur fed-batch

L'analyse, l'estimation et le contrôle des modèles de bioréacteurs a fait l'objet de nombreux travaux [3]. Dans ce chapitre, on considère les bioréacteurs de type fed-batch, qui sont des bioréacteurs fermés, dont on ne soutire aucun produit jusqu'à la fin du processus (par opposition aux bioréacteurs continus). On considère le modèle suivant :

$$\begin{cases} \partial_t x = \mu x - \frac{F}{V} x \\ \partial_t s = -a_1 \mu x + s_i \frac{F}{V} - \frac{F}{V} s \\ \partial_t p = a_2 \mu x - \frac{F}{V} p \\ \partial_t V = F \\ X(0) = X_0, \end{cases} \quad (8.1)$$

où x, s, p sont les concentrations respectives de biomasse, substrat et produit, μ est le taux de croissance (fonction des variables d'état), s_i (resp. F) est la concentration (resp. le débit) du substrat en entré. Le choix de l'expression du taux de croissance μ traduit l'influence des diverses variables sur la croissance des cellules : effet limitant du substrat aux basses concentrations (modèle de base de Monod [32]), inhibition de la croissance par la quantité de produit (ou de biomasse) présente etc. Enfin, les coefficients a_1 et a_2 sont des taux de rendement, $-a_1 \mu x$ et $a_2 \mu x$ représentant respectivement la dégradation de substrat et la production de produit induits par la biomasse x .

On peut constater dans (8.1) que l'équation portant sur V est indépendante du reste et résolue :

$$V = \partial_t^{-1} F + V(0).$$

On note donc $u := \frac{F}{V}$, quantité représentant le taux de dilution de substrat en entrée du bioréacteur et qui sera désormais la commande considérée pour le modèle, sachant que F et V se déduisent de u par les relations :

$$\begin{cases} V = V_0 e^{\partial_t^{-1} u} \\ F = V_0 u e^{\partial_t^{-1} u}. \end{cases} \quad (8.2)$$

Ainsi, on retient pour le bioréacteur fed-batch le modèle dynamique suivant :

$$\begin{cases} \partial_t x = \mu(X) x - u x \\ \partial_t s = -a_1 \mu(X) x + u (s_i - s) \\ \partial_t p = a_2 \mu(X) x - u p \\ X(0) = X_0, \end{cases} \quad (8.3)$$

avec $X := (x, s, p)^T$ l'état du modèle et $\mu(X)$ la fonction (en général non linéaire) de taux de croissance.

Si l'intégration numérique de ce système dynamique est chose relativement aisée par les méthodes numériques standard de résolution d'équations différentielles, il en est autrement de la résolution de problème dynamiques associés à celui-ci (citons à titre d'exemples les problèmes d'asservissement, de commande optimale, de planification de trajectoire, d'identification etc.), notamment du fait de la nature fortement non linéaire et couplée des équations.

L'objet des sections suivantes est de montrer comment la paramétrisation d'un tel système au moyen de l'utilisation de transformation opératorielle, notamment *non locales*, peut aboutir à une simplification significative des problèmes dynamiques qui lui sont associés.

8.2 Paramétrisation du modèle

8.2.1 Transformation par changement de temps dynamique

Le modèle (8.3) est de forme (4.24), avec $u > 0$. En vertu des résultats du paragraphe 4.3.4, le changement de temps dynamique :

$$\mathbf{S}_{\partial_t^{-1}u} : x \mapsto \tilde{x} := x \circ (\partial_t^{-1}u)^{-1} \quad (8.4)$$

permet de transformer (8.3) en le modèle en temps τ suivant :

$$\begin{cases} \partial_\tau \tilde{x} = -\tilde{x} + \frac{\mu(\tilde{X})\tilde{x}}{\tilde{u}} \\ \partial_\tau \tilde{s} = -\tilde{s} + s_i - a_1 \frac{\mu(\tilde{X})\tilde{x}}{\tilde{u}} \\ \partial_\tau \tilde{p} = -\tilde{p} + a_2 \frac{\mu(\tilde{X})\tilde{x}}{\tilde{u}} \\ \tilde{X}(0) = X_0, \end{cases} \quad (8.5)$$

la correspondance entre τ et t étant définie par $\partial_t \tau = u$ ou $\partial_\tau t = \frac{1}{u}$. Les variations de l'horloge définie par ce changement de temps sont régies par la dilution en entrée du bioréacteur, ce qui lui confère un sens physique certain. C'est sur la base du nouveau modèle (8.5) que la paramétrisation est construite.

8.2.2 Équation paramétrique associée au modèle

La forme du modèle (8.5) suggère la définition de la sortie paramétrique :

$$y = \mathbf{A}(\tilde{u}, \tilde{X}) := \left(\frac{\mu(\tilde{X})\tilde{x}}{\tilde{u}}, \boldsymbol{\delta} \cdot X \right)^T \in \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{D}_{CI} \quad (8.6)$$

où $\mathcal{Y}_1 = \{f \in L^\infty(I) ; f > 0\}$ et $\mathcal{D}_{CI} \subset \mathbb{R}^3$ est le domaine d'admissibilité des conditions initiales.

En effet, l'opérateur \mathbf{A} est continu et définit un paramétrage de (8.5) via l'équation paramétrique :

$$\begin{cases} \partial_\tau \tilde{x} = -\tilde{x} + y_1 \\ \partial_\tau \tilde{s} = -\tilde{s} + s_i - a_1 y_1 \\ \partial_\tau \tilde{p} = -\tilde{p} + a_2 y_1 \\ y = \mathbf{A}(\tilde{u}, \tilde{X}); \end{cases} \quad (8.7)$$

on vérifie sans difficulté que $\forall y \in \mathcal{Y}$, (u, X_0, X, y) solution de (8.7) entraîne (u, X_0, X) solution de (8.5). La résolution de (8.7) permet alors d'expliciter l'opérateur de paramétrage $\mathbf{Q} = (\mathbf{B}, \mathbf{C})$ de (8.5) :

$$\begin{cases} \tilde{x} = \mathbf{C}_1(y) := (\partial_\tau + 1)^{-1} (y_1) + y_2 e^{-(\cdot)} \\ \tilde{s} = \mathbf{C}_2(y) := (\partial_\tau + 1)^{-1} (s_i - a_1 y_1) + y_3 e^{-(\cdot)} \\ \tilde{p} = \mathbf{C}_3(y) := (\partial_\tau + 1)^{-1} (a_2 y_1) + y_4 e^{-(\cdot)} \\ (\tilde{u}, X_0) = \mathbf{B}(y) := \left(\frac{\mu(\mathbf{C}(y)) \mathbf{C}_1(y)}{y_1}, y_2, y_3, y_4 \right). \end{cases} \quad (8.8)$$

Enfin, d'après la proposition 5.27, on sait alors que $(\mathbf{S}_{\partial_t^{-1}u}^{-1} \circ \mathbf{Q}, \mathcal{Y})$ définit un paramétrage pour le modèle en temps t (8.3), soit :

$$\begin{cases} x = \mathbf{S}_{\partial_t^{-1}u}^{-1} \circ \mathbf{C}_1(y) = \left[(\partial_\tau + 1)^{-1} (y_1) + y_2 e^{-(\cdot)} \right] \circ \partial_t^{-1} u \\ s = \mathbf{S}_{\partial_t^{-1}u}^{-1} \circ \mathbf{C}_2(y) = \left[(\partial_\tau + 1)^{-1} (s_i - a_1 y_1) + y_3 e^{-(\cdot)} \right] \circ \partial_t^{-1} u \\ p = \mathbf{S}_{\partial_t^{-1}u}^{-1} \circ \mathbf{C}_3(y) = \left[(\partial_\tau + 1)^{-1} (a_2 y_1) + y_4 e^{-(\cdot)} \right] \circ \partial_t^{-1} u \\ (u, X_0) = \mathbf{S}_{\partial_t^{-1}u}^{-1} \circ \mathbf{B}(y) = \left(\frac{\mu(\mathbf{C}(y)) \mathbf{C}_1(y)}{y_1} \circ \partial_t^{-1} u, y_2, y_3, y_4 \right). \end{cases} \quad (8.9)$$

Remarque 8.1 L'équation paramétrique (8.9) peut être résolue (i.e. le paramétrage peut-être explicité) en utilisant l'expression du changement de temps basée sur \tilde{u} (cf. relations (4.8)) et en exprimant \tilde{u} en fonction de y . On obtient ainsi :

$$\begin{cases} x = \mathbf{S}_{\partial_\tau^{-1} \frac{1}{\tilde{u}}}^{-1} \circ \mathbf{C}_1(y) = \left[(\partial_\tau + 1)^{-1} (y_1) + y_2 e^{-(\cdot)} \right] \circ \left(\partial_\tau^{-1} \frac{y_1}{\mu(\mathbf{C}(y)) \mathbf{C}_1(y)} \right)^{-1} \\ s = \mathbf{S}_{\partial_\tau^{-1} \frac{1}{\tilde{u}}}^{-1} \circ \mathbf{C}_2(y) = \left[(\partial_\tau + 1)^{-1} (s_i - a_1 y_1) + y_3 e^{-(\cdot)} \right] \circ \left(\partial_\tau^{-1} \frac{y_1}{\mu(\mathbf{C}(y)) \mathbf{C}_1(y)} \right)^{-1} \\ p = \mathbf{S}_{\partial_\tau^{-1} \frac{1}{\tilde{u}}}^{-1} \circ \mathbf{C}_3(y) = \left[(\partial_\tau + 1)^{-1} (a_2 y_1) + y_4 e^{-(\cdot)} \right] \circ \left(\partial_\tau^{-1} \frac{y_1}{\mu(\mathbf{C}(y)) \mathbf{C}_1(y)} \right)^{-1} \\ (u, X_0) = \mathbf{S}_{\partial_\tau^{-1} \frac{1}{\tilde{u}}}^{-1} \circ \mathbf{B}(y) = \left(\frac{\mu(\mathbf{C}(y)) \mathbf{C}_1(y)}{y_1} \circ \left(\partial_\tau^{-1} \frac{y_1}{\mu(\mathbf{C}(y)) \mathbf{C}_1(y)} \right)^{-1}, y_2, y_3, y_4 \right). \end{cases}$$

Cependant, l'équation paramétrique (quasi explicite) (8.9) est plus simple tout en étant parfaitement résoluble du fait de la causalité de l'opérateur de changement de temps utilisé ; c'est donc cette expression qui est utilisée en pratique.

On constate que l'équation paramétrique (8.7) contient en particulier un système d'équations linéaires découplées entre l'état \tilde{x} et le paramètre y , celui-ci étant désormais l'entrée du système. Ces équations d'état, en un certain sens équivalentes au modèle initial, permettent alors de poser les problèmes de contrôle de manière simplifiée, en faisant appel à des techniques classiques de contrôle des systèmes linéaires scalaires, les solutions (u, X) du modèle non linéaire initial étant quant à elles aisément déduite par la relation paramétrique (8.9).

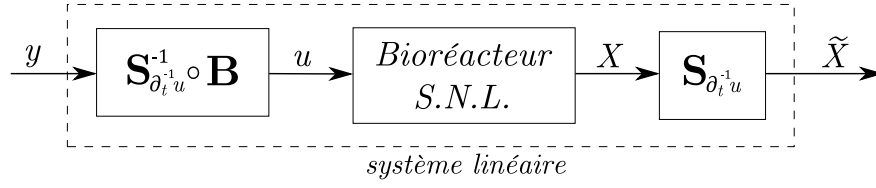


FIG. 8.1 – Paramétrage du modèle non linéaire.

On notera que le paramétrage proposé, et par conséquent toutes les méthodes basées sur celui-ci, est valable pour toute expression de $\mu(X)$ (Monod, etc.). De plus, un tel paramétrage permet d'envisager l'ajout d'équations de structure similaire à celle des autres équations, afin de prendre en compte d'éventuelles quantités négligées : ceci n'ajouterait aucune difficulté ni coût supplémentaire à la méthode.

Remarque 8.2 Dans cette partie, le paramétrage introduit est destiné à correspondre à divers problèmes de contrôle ; les conditions initiales ne sont a priori pas fixées et peuvent faire partie de la résolution du problème (pour le contrôle optimal par exemple). Concernant le problème de l'asservissement cependant, traité dans la section suivante, elles ne font pas partie de l'inconnue du problème, le paramètre y se résumant à y_1 , et le paramétrage s'exprimant :

$$\begin{cases} x = \mathbf{S}_{\partial_t^{-1}u}^{-1} \circ \mathbf{C}_1(y) = \left[(\partial_\tau + 1)^{-1} (y_1) + x_0 e^{-(\cdot)} \right] \circ \partial_t^{-1}u \\ s = \mathbf{S}_{\partial_t^{-1}u}^{-1} \circ \mathbf{C}_2(y) = \left[(\partial_\tau + 1)^{-1} (s_i - a_1 y_1) + s_0 e^{-(\cdot)} \right] \circ \partial_t^{-1}u \\ p = \mathbf{S}_{\partial_t^{-1}u}^{-1} \circ \mathbf{C}_3(y) = \left[(\partial_\tau + 1)^{-1} (a_2 y_1) + p_0 e^{-(\cdot)} \right] \circ \partial_t^{-1}u \\ u = \mathbf{S}_{\partial_t^{-1}u}^{-1} \circ \mathbf{B}(y) = \frac{\mu(\mathbf{C}(y)) \mathbf{C}_1(y)}{y_1} \circ \partial_t^{-1}u. \end{cases}$$

Ceci peut également se traduire par une classe de conditions initiales \mathcal{D}_{CI} réduite au seul singleton $\{X_0\}$.

Remarque 8.3 On étudie en Section 8.5 des extensions génériques du modèle (8.3) sur lesquelles il est encore possible de construire un paramétrage efficace.

8.2.3 Illustration du paramétrage du modèle

Afin d'illustrer les propriétés de paramétrage du modèle, on se propose de simuler (8.3) avec une entrée $u = 0.12 \left(1 - \frac{0.9 e^t}{e^{10}} \right)$, de construire le paramètre y à partir de cette simulation en utilisant l'opérateur de sortie paramétrique (8.6), et enfin de reconstruire la commande et l'état du système par la seule connaissance de ce paramètre en utilisant l'équation paramétrique (8.9). Le schéma numérique utilisé pour la réalisation de l'opérateur $(\partial_\tau + 1)^{-1}$ est basé sur une quadrature de la formule de Duhamel exacte pour les fonctions affines par morceaux ; le détail de celui-ci est donné en Annexe B.

On trace en figure 8.2 la commande et l'état simulés u, x, s, p, V avec leur reconstitution via y en utilisant (8.9), le volume V étant reconstitué à partir de u en utilisant la relation (8.2) ; comme attendu, les courbes coïncident. Les valeurs des paramètres physiques choisies sont les suivantes : $a_1 = 14.3$, $a_2 = 6.25$, $p_i = 100 \text{ g.l}^{-1}$, $K_s = 0.5 \text{ g.l}^{-1}$, $s_i = 50 \text{ g.l}^{-1}$, $\mu = \mu_{\max} \frac{s}{k_s + s} \left(1 - \frac{p}{p_i} \right)$, $\mu_{\max} = 0.54$.

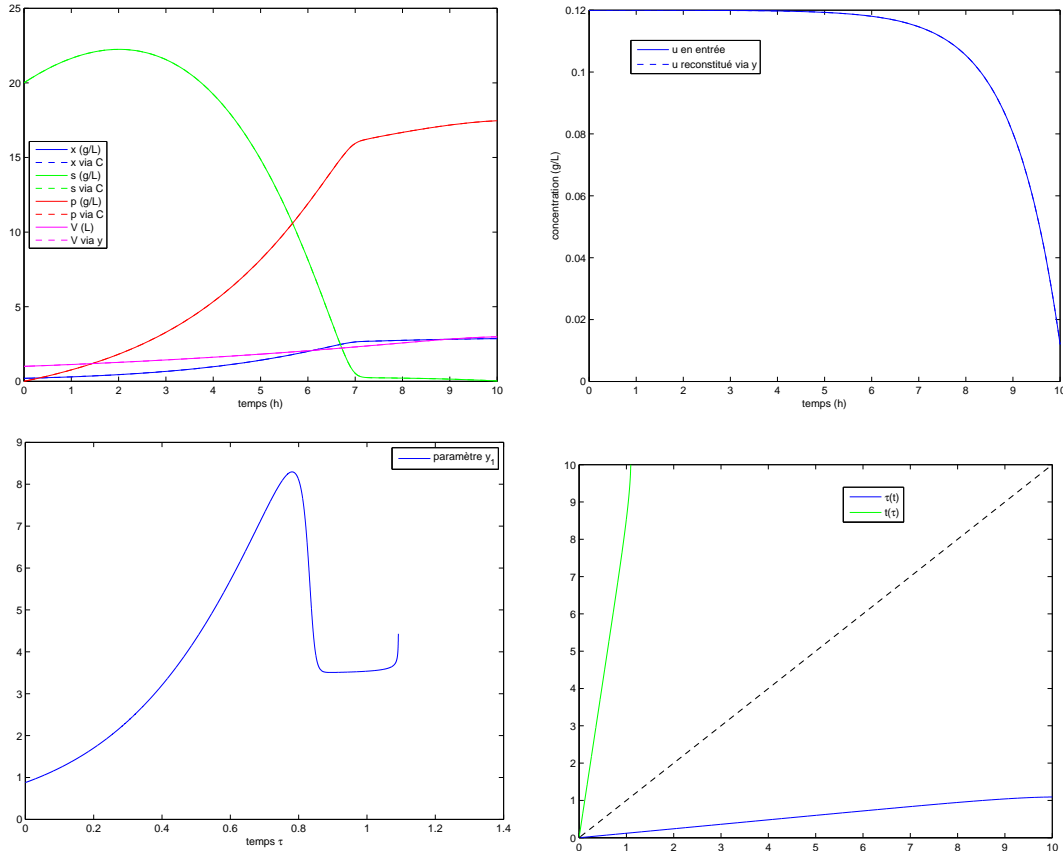


FIG. 8.2 – Etat/commande simulés et reconstitués par la seule connaissance du paramètre y .

8.3 Asservissement du modèle paramétré

8.3.1 Asservissement de la biomasse

Les équations d'état de l'équation paramétrique (8.7), linéaires et découplées, permettent de poser simplement les problèmes de contrôle du bioréacteur. L'asservissement en biomasse x (on verra par la suite que s et p sont contrôlables par le même biais) est sans doute le plus critique des trois dans la mesure où celle-ci intervient de manière directe dans toutes les équations. Ainsi, tous les résultats obtenus avec la biomasse se transposent (de manière avantageuse en général) sur les autres types d'asservissements.

La structure de l'équation paramétrique permet de ramener ce problème de contrôle à l'asservissement d'une équation linéaire scalaire, d'entrée y_1 :

$$\begin{cases} \partial_\tau \tilde{x} = -\tilde{x} + y_1 \\ \tilde{x}(0) = x_0, \end{cases} \quad (8.10)$$

que l'on choisit d'asservir par un correcteur classique de type proportionnel-intégral :

$$K(p) = \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) K. \quad (8.11)$$

On peut, par exemple, choisir les paramètres pour que le temps de réponse (en temps τ) ait la valeur désirée. On choisira par la suite $T_i = 1$, le temps de réponse du système linéaire (en temps τ) étant alors égal à $\frac{3}{K}$.

On en déduit alors, par post et pré-composition par les opérateurs adéquats, un *correcteur non linéaire* pour le système global. (cf. Figures¹ 8.3 et 8.4).

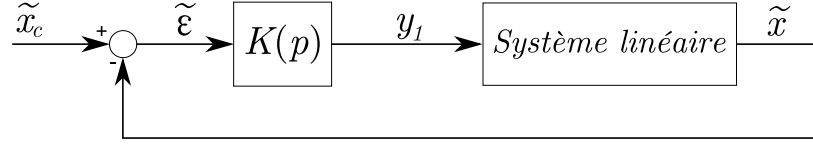


FIG. 8.3 – Contrôleur sur le système linéaire.

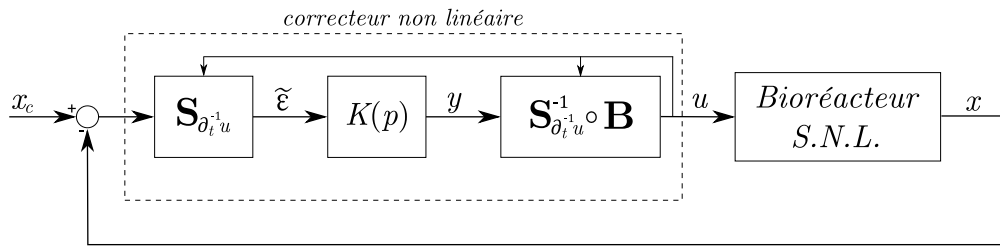


FIG. 8.4 – Contrôleur sur le système non linéaire.

On donne en Figure 8.5 le résultat de l'asservissement pour deux profils de biomasse, les valeurs des paramètres étant celles du paragraphe 8.2.3. On constate que le correcteur remplit son rôle : la biomasse suit la trajectoire de référence.

Comme cela a été dit, le paramétrage ayant été construit sans spécifier $\mu(X)$, le correcteur construit est valable pour toute forme de taux de croissance. A titre d'illustration, on donne en Figure 8.6 une courbe d'asservissement obtenue avec un modèle dont le taux de croissance est de type Monod [32] :

$$\mu(X) = \mu_{\max} \frac{s}{k_s + s}.$$

On constate sur la Figure 8.6 que le système demeure correctement asservi.

Remarque 8.4 Le problème de conception d'un asservissement est, comme d'ordinaire, posé en terme de performances du système rebouclé. Ici, la paramétrisation permet de construire un correcteur pour le système non linéaire de manière simple, à partir d'un correcteur du système paramétré. Dans le cas présent, la gain K est choisi de manière à ce que le temps de réponse en temps τ soit convenable au regard des valeurs usuellement prise par la dilution en entrée u , sachant que l'horloge τ traduit directement la consommation totale de celle-ci.

Même si, en temps t , la notion de temps de réponse perd tout son sens (car le système est non linéaire), on peut s'interroger sur la transposition en temps t des performances choisies en temps τ . Il a d'une part été vérifié, de manière empirique, la cohérence de ce temps de réponse τ_{rep} sur

¹On rappelle que, $\mathbf{S}_{\partial_t^{-1}u}$ étant linéaire, on a $\varepsilon := \tilde{x}_c - \tilde{x} = \mathbf{S}_{\partial_t^{-1}u}(x_c - x)$.

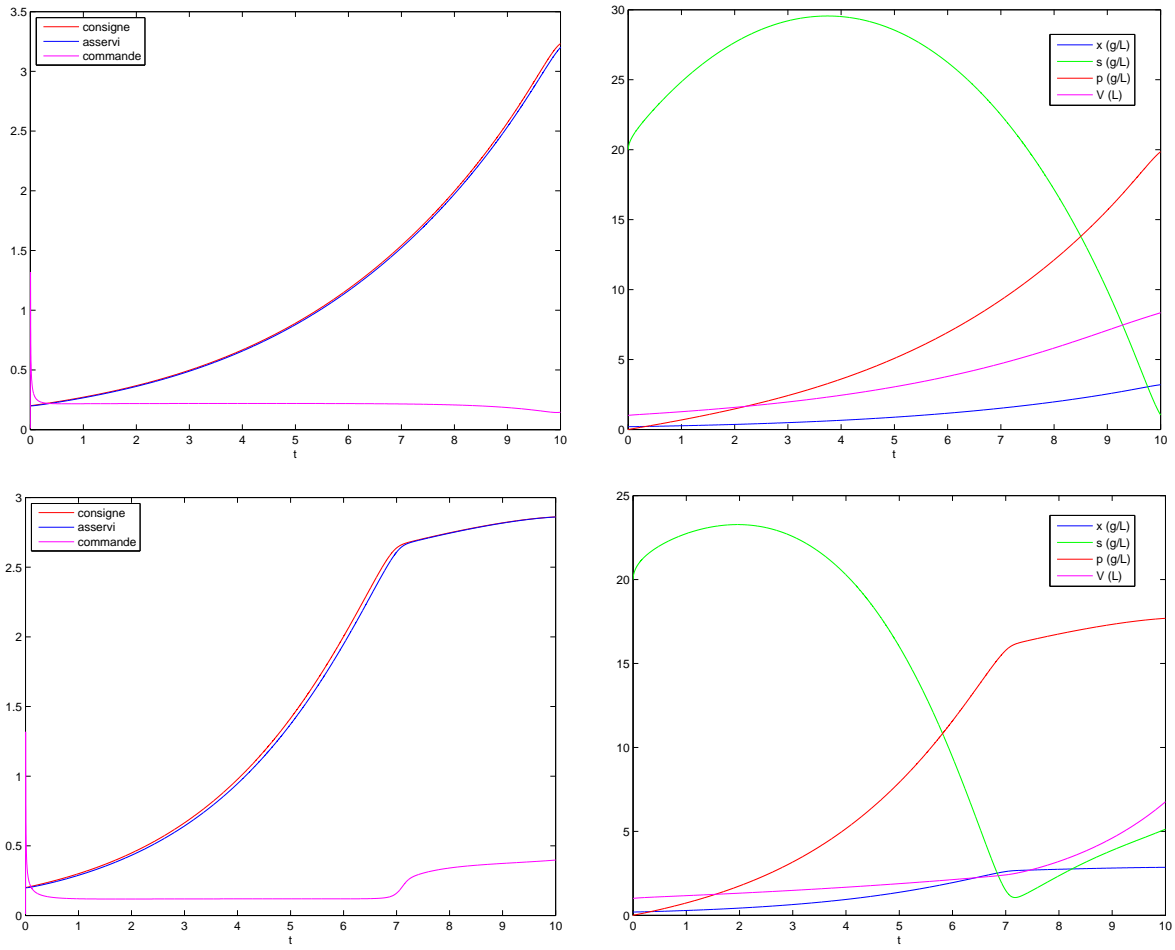


FIG. 8.5 – Asservissement de la biomasse pour deux profils différents.

les simulations ; ainsi, en mettant une consigne de type échelon sur le système non linéaire, on constate que le “temps de réponse” t correspond à l’instant où la quantité $\partial_t^{-1}u$ vaut τ_{rep} : le temps de réponse en τ choisi est, comme attendu, respecté. D’autre part, il peut être envisagé de lier les performances en temps τ à celles en temps t en fixant une borne minimale à la commande u , ce qui fixe la consommation $\partial_t^{-1}u$ (i.e. la rapidité d’évolution de l’horloge τ), et permettrait ainsi de déterminer un temps de réponse τ_{rep} (et donc un gain K) correspondant à une “réactivité” en temps t que l’on pourrait choisir.

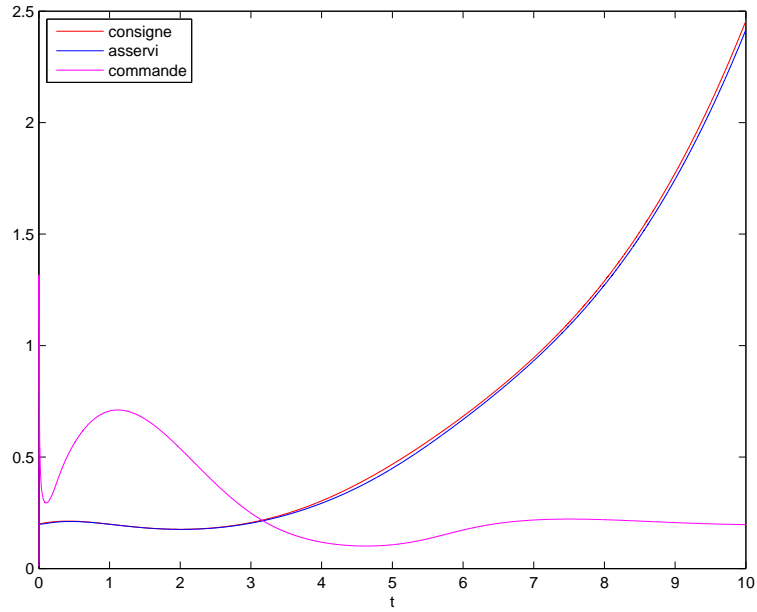


FIG. 8.6 – Asservissement de la biomasse avec un taux de croissance de type Monod.

8.3.2 Asservissement du substrat et du produit

La structure de toutes les équations d'état de l'équation paramétrique (8.7) étant similaire, le correcteur précédemment construit pour la biomasse permettra de construire, à un coefficient multiplicatif près, un correcteur pour asservir les quantités s ou p .

En effet, en posant $\tilde{S} := \tilde{s} - s_i$, on a les équations :

$$\begin{cases} \partial_\tau \tilde{S} = -\tilde{S} - a_1 y_1 \\ \tilde{S}(0) = s_0 - s_i \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \partial_\tau \tilde{p} = -\tilde{p} + a_2 y_1 \\ \tilde{p}(0) = p_0, \end{cases}$$

de même dynamique que (8.10) et que l'on asservit respectivement avec les correcteurs $-a_1 K(p)$ et $a_2 K(p)$, où $K(p)$ est le correcteur défini par (8.11).

On donne figures 8.7 et 8.8 un exemple d'asservissement en substrat et en produit.

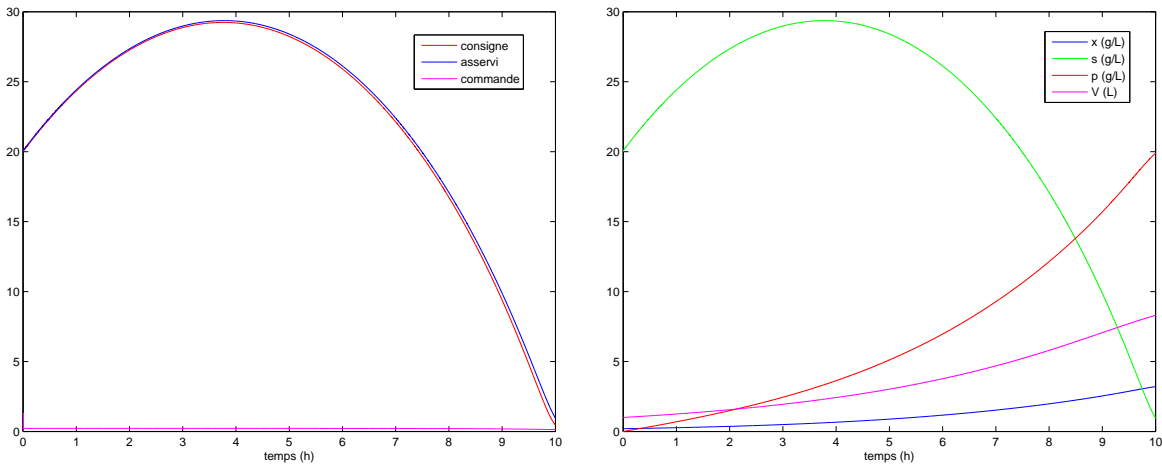


FIG. 8.7 – Asservissement en substrat.

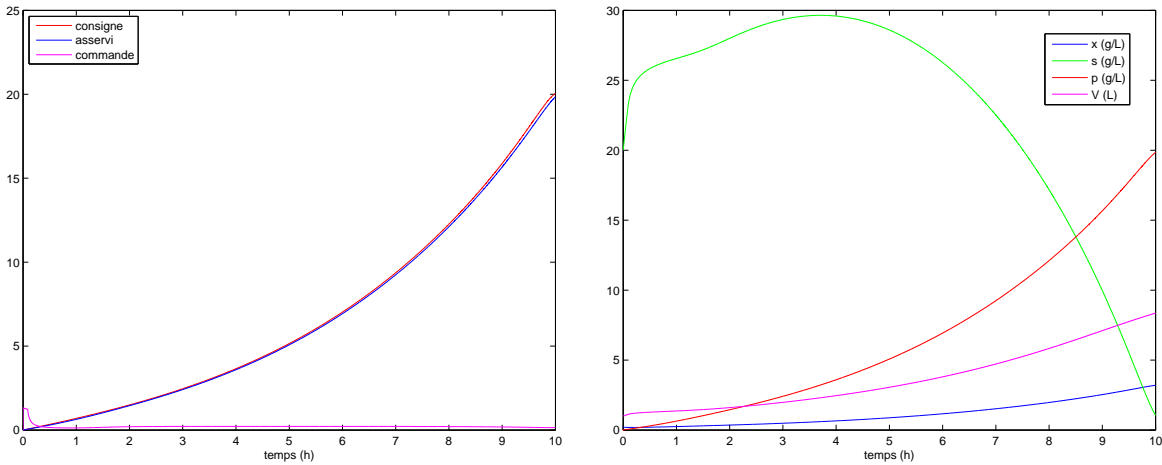


FIG. 8.8 – Asservissement en produit.

Par la suite, et sauf mention du contraire, on travaillera sur l'asservissement en biomasse, celui-ci étant le plus exigeant et les résultats pour les autres types d'asservissement étant de même nature.

8.3.3 Robustesse aux bruits de mesure

On s'intéresse dans ce paragraphe à l'influence d'un bruit de mesure sur la qualité de l'asservissement. On introduit donc un bruit coloré additif obtenu par filtrage d'un bruit blanc de paramètre σ par un filtre du premier ordre :

$$F(p) = \frac{a_m}{p + a_m}$$

On donne Figure 8.9 des courbes d'asservissement en présence de bruit. On peut noter que la commande est sensible au bruit à cause du fort gain K utilisé dans le correcteur $K(p)$. Cependant, l'asservissement reste bon même avec un fort niveau de bruit.

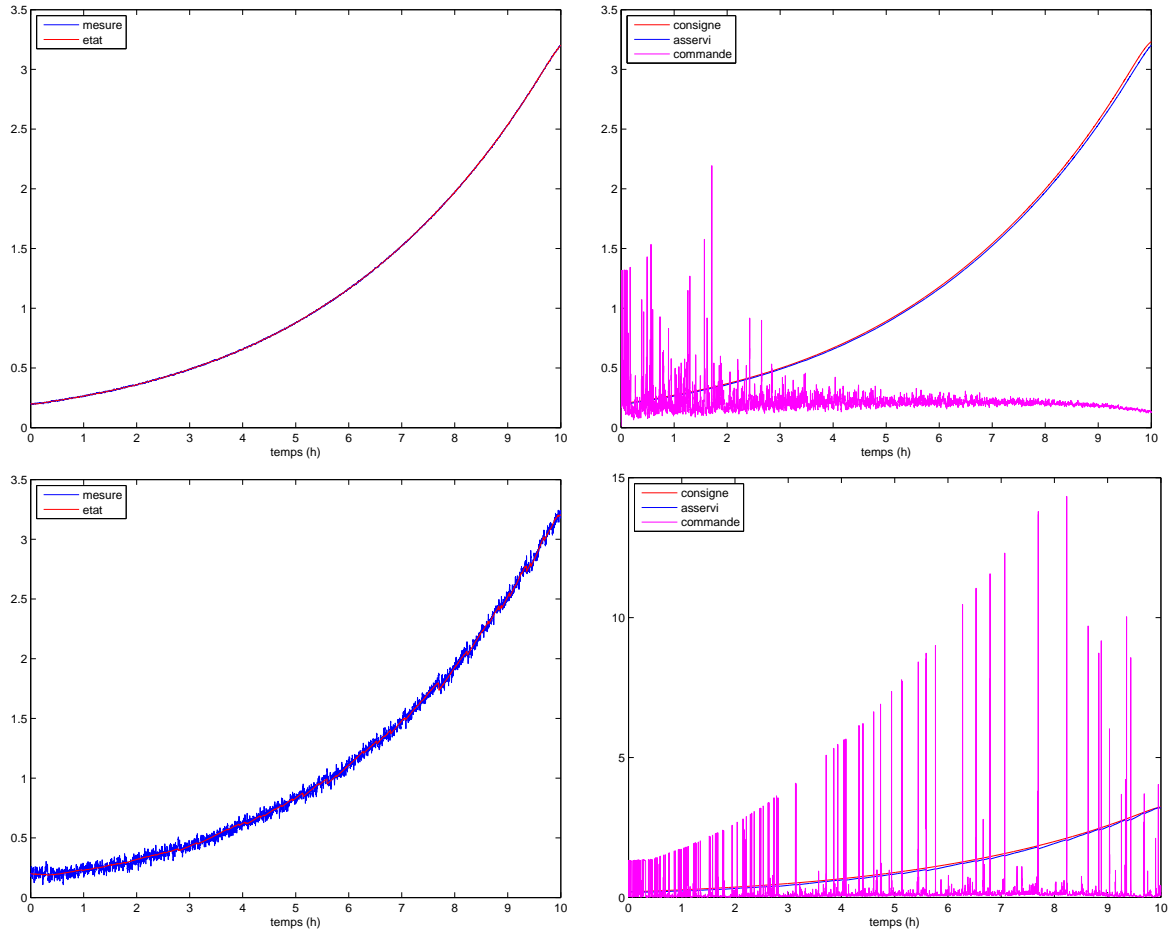


FIG. 8.9 – Asservissement de la biomasse avec des bruits de paramètres respectifs $\sigma = 0.01$ et 0.1 , avec $a_m = 200$.

Remarque 8.5 *Les asservissements du substrat s et du produit p sont moins sensibles au bruit que l'asservissement en biomasse car le gain de leur correcteur linéaire respectif est plus faible ($-\frac{K}{a_1}$ et $\frac{K}{a_2}$).*

On peut également envisager de filtrer la commande afin de la rendre plus lisse. On montre en Figure 8.10 un exemple de contrôle avec un filtrage au premier ordre $\frac{a_u}{p+a_u}$ sur u ; celui-ci ne dégrade pas la qualité de l'asservissement et permet une commande plus lisse.

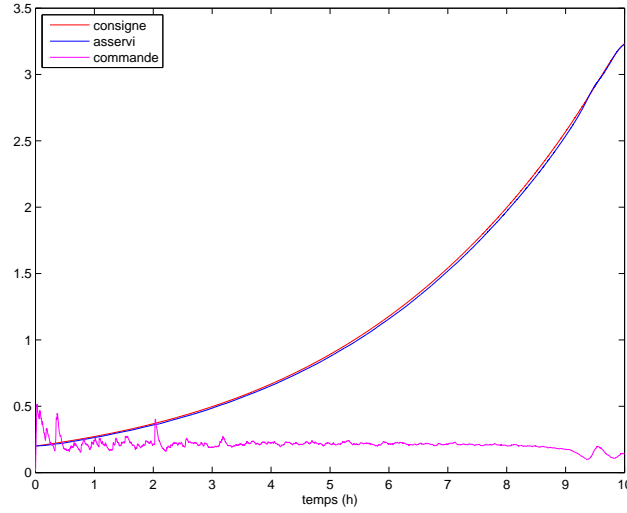


FIG. 8.10 – Asservissement de la biomasse avec des bruits de paramètres $\sigma = 0.1$, $a_m = 200$, avec commande filtrée ($a_u = 20$).

Remarque 8.6 Bien que l'asservissement soit bon, on verra dans le paragraphe 8.3.5 que le bruit de mesure fausse la relation $X = \mathbf{S}_{\partial_t^{-1}u}^{-1} \circ \mathbf{C}(y)$: l'état calculé via cette relation ne coïncide plus avec l'état réel du système. Ceci est normal et pourra être amélioré avec un recalage de modèle comme proposé dans le paragraphe 8.3.5.

8.3.4 Compensation de perturbation

Compensation de perturbation par modification de l'opérateur de paramétrage

On montre Figure 8.11 les effets d'une perturbations en biomasse (mort soudaine d'une certaine quantité de cellules par exemple) sur l'asservissement du bioréacteur.

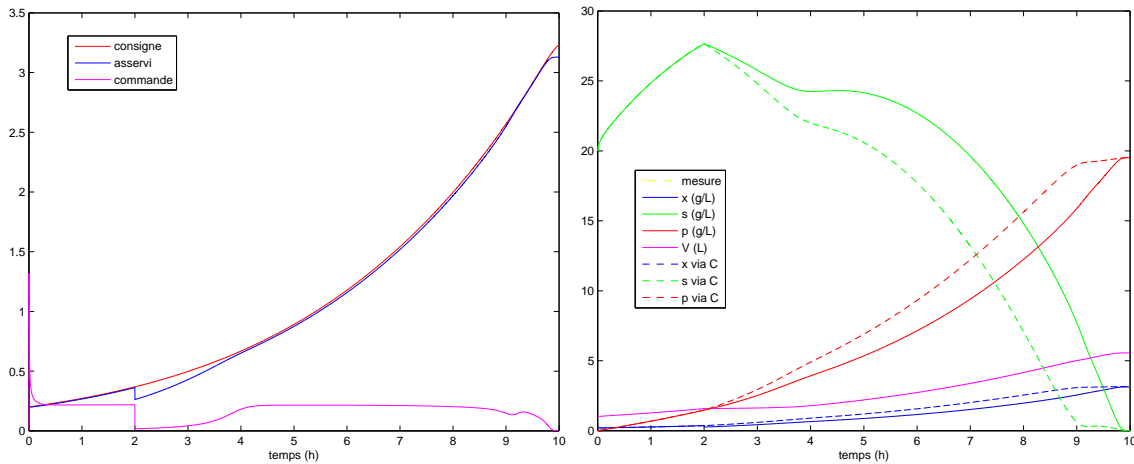


FIG. 8.11 – Asservissement en présence d'une perturbation en biomasse de -0.1 à $t = 2h$.

Remarque 8.7 Une erreur de condition initiale pouvant être interprétée comme une perturbation en $t = 0$, les résultats concernant également les incertitudes de conditions initiales. En particulier, l'asservissement (sans compensation de perturbation) est robuste à ces incertitudes.

Même si la qualité de l'asservissement reste bonne, on peut noter une différence entre l'état X et $\mathbf{S}_{\partial_t^{-1}u}^{-1} \circ \mathbf{C}(y)$ dès que survient la perturbation. Ceci est dû au fait qu'une perturbation rend le paramétrage (8.9) invalide.

En effet, considérons le modèle de bioréacteur (8.3) dans lequel on introduit une perturbation en t_0 modélisée par $\alpha\delta_{t_0}$, $\alpha > 0$, dans l'équation en biomasse (les autres étant inchangées) :

$$\begin{cases} \partial_t x = \mu(X)x - ux + \alpha\delta_{t_0} \\ \dots \end{cases}$$

Alors, le changement de temps (8.4) aboutit à :

$$\begin{cases} \partial_\tau \tilde{x} = -\tilde{x} + \frac{\mu(\tilde{X})\tilde{x}}{\tilde{u}} + \frac{\mathbf{S}_{\partial_t^{-1}u}(\alpha\delta_{t_0})}{\tilde{u}} \\ \dots \end{cases}$$

D'après la remarque 4.12, $\mathbf{S}_{\partial_t^{-1}u}(\delta_{t_0}) = u(t_0)\delta_{\tau_0}$, ce qui permet d'établir, avec le même opérateur de sortie paramétrique (8.6), le paramétrage sur \tilde{x} suivant (les autres étant inchangés par rapport à (8.8)) :

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= (\partial_\tau + 1)^{-1}(y_1) + y_2 e^{-\cdot} + u(t_0)\alpha (\partial_\tau + 1)^{-1} \left(\frac{1}{\tilde{u}} \delta_{\tau_0} \right) \\ &= \mathbf{C}_1(y) + u(t_0)\alpha \int_0^\cdot \frac{1}{\tilde{u}(s)} e^{s-\cdot} \delta_{\tau_0}(s) ds \\ &= \mathbf{C}_1(y) + \alpha e^{\tau_0-\cdot} Y(\cdot - \tau_0), \end{aligned} \tag{8.12}$$

où Y désigne la fonction de Heaviside.

Ainsi, la prise en compte d'une perturbation nécessite l'introduction du terme supplémentaire $\alpha e^{\tau_0-\cdot} Y(\cdot - \tau_0)$ dans l'opérateur de paramétrage de \tilde{x} (et donc dans celui de x à une composition par $\partial_t^{-1}u$ près). On déduit de manière similaire le terme à ajouter pour les perturbations portant sur s ou p . En pratique, l'instant auquel intervient la perturbation étant inconnu, il faut mettre en place une règle de détection de perturbation, en se basant par exemple sur les variations brutales de l'erreur relative et/ou absolue entre la mesure de \tilde{x} et $\mathbf{C}_1(y)$.

On donne Figure 8.12 le résultat obtenu avec détection et compensation de perturbation en utilisant (8.12) : les résultats sont clairement améliorés, la reconstitution de l'état par l'opérateur de paramétrage étant cette fois fidèle.

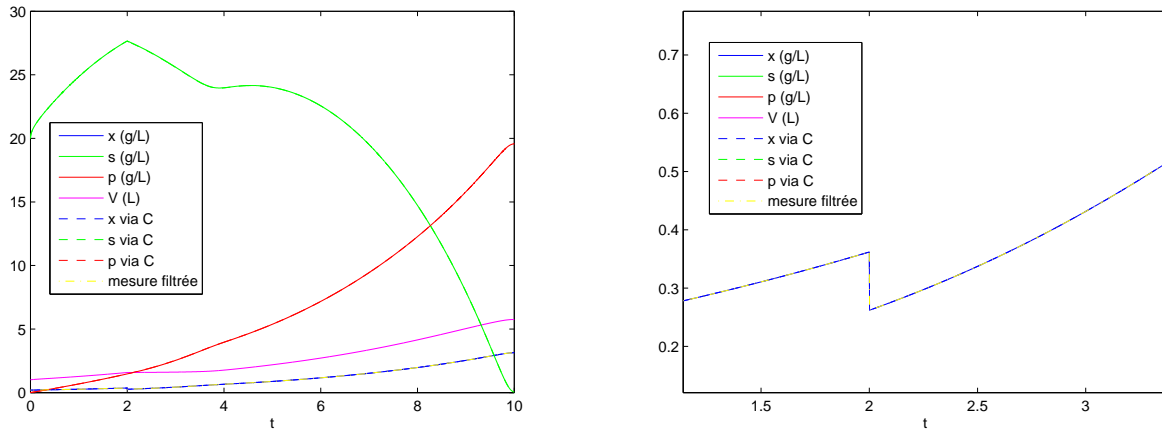


FIG. 8.12 – Détection et compensation de la perturbation en biomasse par modification de l'opérateur C_1 .

Remarque 8.8 *Les résultats sont similaires pour une perturbation sur s ou p .*

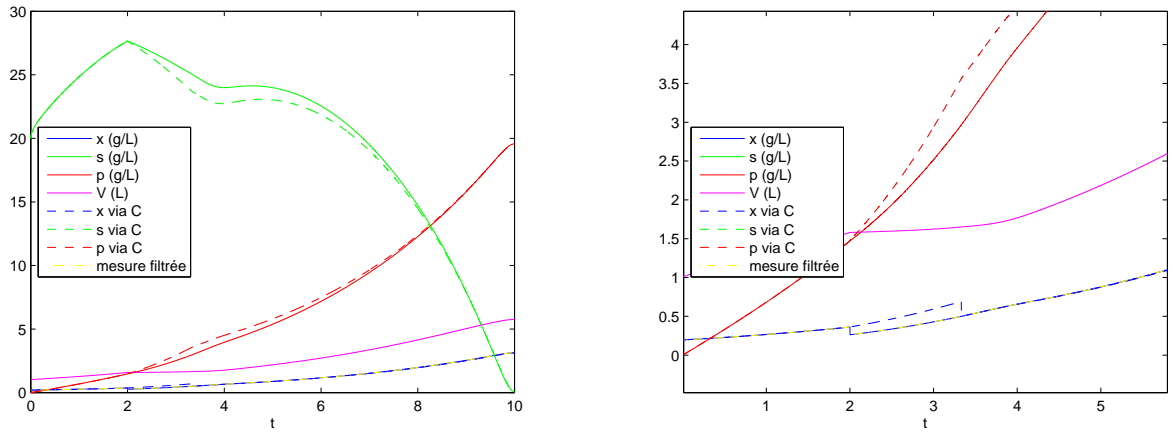
Compensation de la perturbation par modification de modèle

On peut imaginer un autre moyen de prendre en compte une perturbation, se basant sur le caractère local du modèle, et qui présente l'intérêt d'être plus générique en vue d'une utilisation récurrente. En effet, une perturbation faussant le paramétrage du modèle, on peut décider de réinitialiser le modèle pour que le paramétrage (8.9) redevienne correct, en considérant l'instant courant comme étant le nouvel instant initial, avec pour conditions initiales la mesure de x (après perturbation donc) et $C_2(y)$, $C_3(y)$ pour s et p .

Ainsi, le paramétrage (8.9) reste inchangé, la perturbation ayant été prise en compte dans la nouvelle condition initiale du modèle, sous réserve que la mesure soit suffisamment fiable (cf. plus bas pour gérer la présence de bruit de mesure). Les résultats obtenus avec cette méthode sont identiques à ceux obtenus avec la modification de l'opérateur de paramétrage : la reconstitution de l'état par l'opérateur de paramétrage reste fidèle après perturbation.

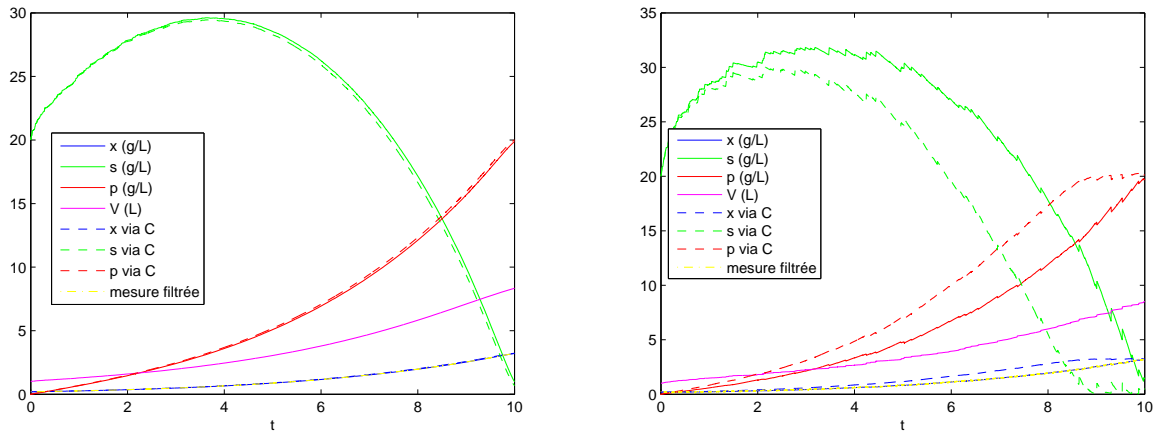
Détection tardive de la perturbation

La détection de la perturbation étant basée sur des erreurs entre la mesure et la reconstruction par paramétrage, il est possible qu'une perturbation de faible amplitude ne soit pas détectée immédiatement, jusqu'à ce que l'erreur qu'elle induise, croissante avec le temps, devienne significative. On montre Figure 8.13 les effets d'un tel cas de figure sur la qualité de la reconstruction de l'état, qui s'améliore dès que la perturbation est détectée et compensée.

FIG. 8.13 – Résultats avec correction due à une perturbation en biomasse à $t = 2h$ perçue à $t = 3.5h$.

8.3.5 Bruit et recalage de modèle à intervalles réguliers

Comme cela a été vu dans le 8.3.4, les perturbations modifient le paramétrage du modèle. Il en va de même concernant la présence d'un bruit de mesure, comme l'illustre la figure 8.14.

FIG. 8.14 – $\mathbf{C}(y)$ en présence bruits de paramètres $\sigma = 0.01$ et 0.1 filtré avec $a_m = 200$ (asservissement de la biomasse.)

Si on peut envisager de compenser des perturbations ponctuelles par modification de paramétrage/modèle, il ne saurait en être de même pour la compensation de bruit. On peut cependant imaginer un processus de compensation à intervalle régulier (par recalage de modèle) pour rétablir la pertinence de la construction de l'état via l'opérateur \mathbf{C} . Le résultat est convainquant comme l'illustre la Figure 8.15 (on rappelle que la quantité mesurée sur ces simulations est la biomasse x).

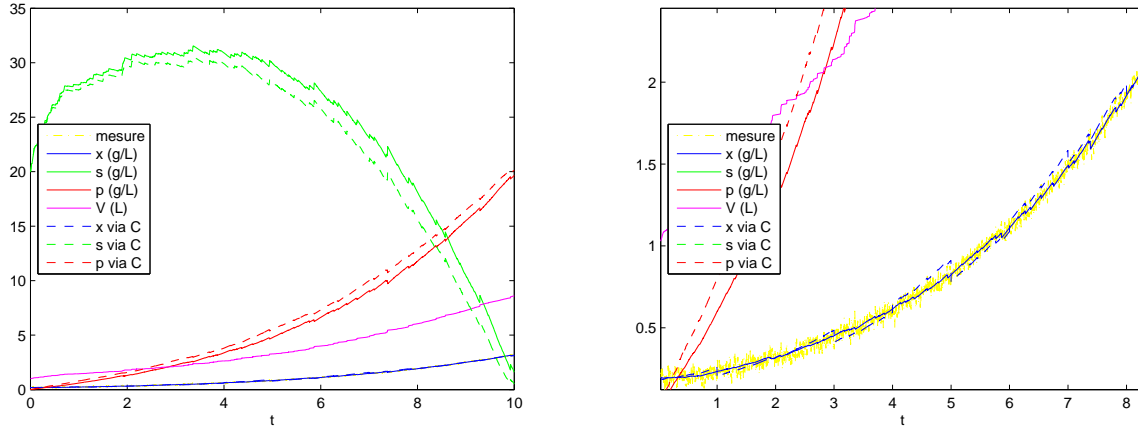


FIG. 8.15 – $C(y)$ en présence de bruit ($\sigma = 0.1$) avec modification de modèle toutes les heures.

Remarque 8.9 Toute cette section permet d'illustrer l'importance de la notion de continuité imposée aux opérateurs de paramétrage, et aux transformations considérées en général. En effet, dans ces résultats numériques, incertitudes, bruits, perturbations, et plus simplement erreurs d'approximations font qu'aucune trajectoire ni aucun opérateurs ne sont “exacts” pourtant, le paramétrage et l'asservissement qui l'utilise demeurent, du fait de la continuité de toutes les opérations en jeu, valides.

8.4 Suivi de trajectoire pour le modèle paramétré

8.4.1 Construction du correcteur et résultats

On se propose dans cette section d'asservir le bioréacteur autour d'une trajectoire de référence déterminée en boucle ouverte y^* , obtenue par exemple en résolvant un problème de contrôle optimal. Avec le paramétrage du modèle du bioréacteur, le problème de suivi de trajectoire se résout simplement, comme l'illustre la Figure 8.16.

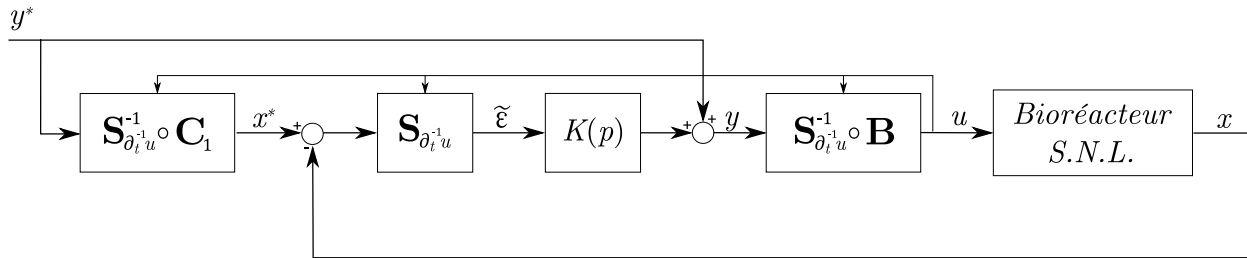


FIG. 8.16 – Structure de suivi de trajectoire pour le bioréacteur.

Le principal intérêt d'un tel procédé est de “soulager” le correcteur de la majeure partie du calcul, celui-ci n'ayant qu'à corriger les erreurs autour de la trajectoire de référence : le gain est alors fortement diminué (et, par conséquent, sa robustesse au bruit augmentée, cf. Figure 8.17).

Afin de ne pas surcharger la section, on ne tracera que certaines courbes, les autres étant semblables à celles présentées dans la Section 8.3. En particulier, l'analyse des effets des perturbations

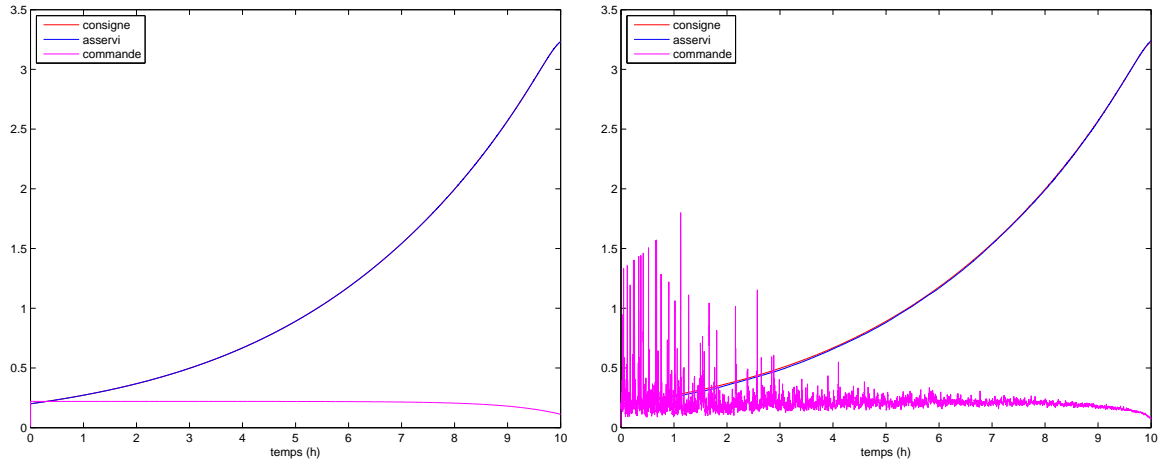


FIG. 8.17 – Suivi de trajectoire ($K = 20$) sans bruit et en présence de bruit de paramètre 0.1, $a_m = 200$.

et des moyens de les compenser effectués dans la Section 8.3 restent valables pour la structures de contrôle prédictif.

8.4.2 Contrôleur passif par recalage de modèle

La structure de suivi de trajectoire permet d’envisager l’utilisation de la technique de recalage de modèle du paragraphe 8.3.5 afin de construire un correcteur passif, basé uniquement sur sa partie prédictive. Le système agit donc en boucle ouverte avec la commande y^* , et un recalage de modèle régulier permet de pallier les écarts entre l’état réel et la reconstruction effectuée via l’opérateur de paramétrage \mathbf{C} . Ce type de “contrôleur” aura en particulier l’avantage d’être très peu sensible au bruit, puisque n’utilisant que peu (en comparaison du correcteur classique) les mesures.

On peut voir sur la Figure 8.18 une comparaison de suivi de trajectoire avec fort bruit de mesure ($\sigma = 0.5$) avec un contrôleur passif et le contrôleur non linéaire classique présenté précédemment ; la robustesse du contrôleur passif y est clairement mise en évidence.

Remarque 8.10 *A faible niveau de bruit, le contrôleur classique avec correcteur s’avère plus efficace, notamment pour les fortes perturbations. Un correcteur utilisant ces deux techniques pourrait alors être envisagé.*

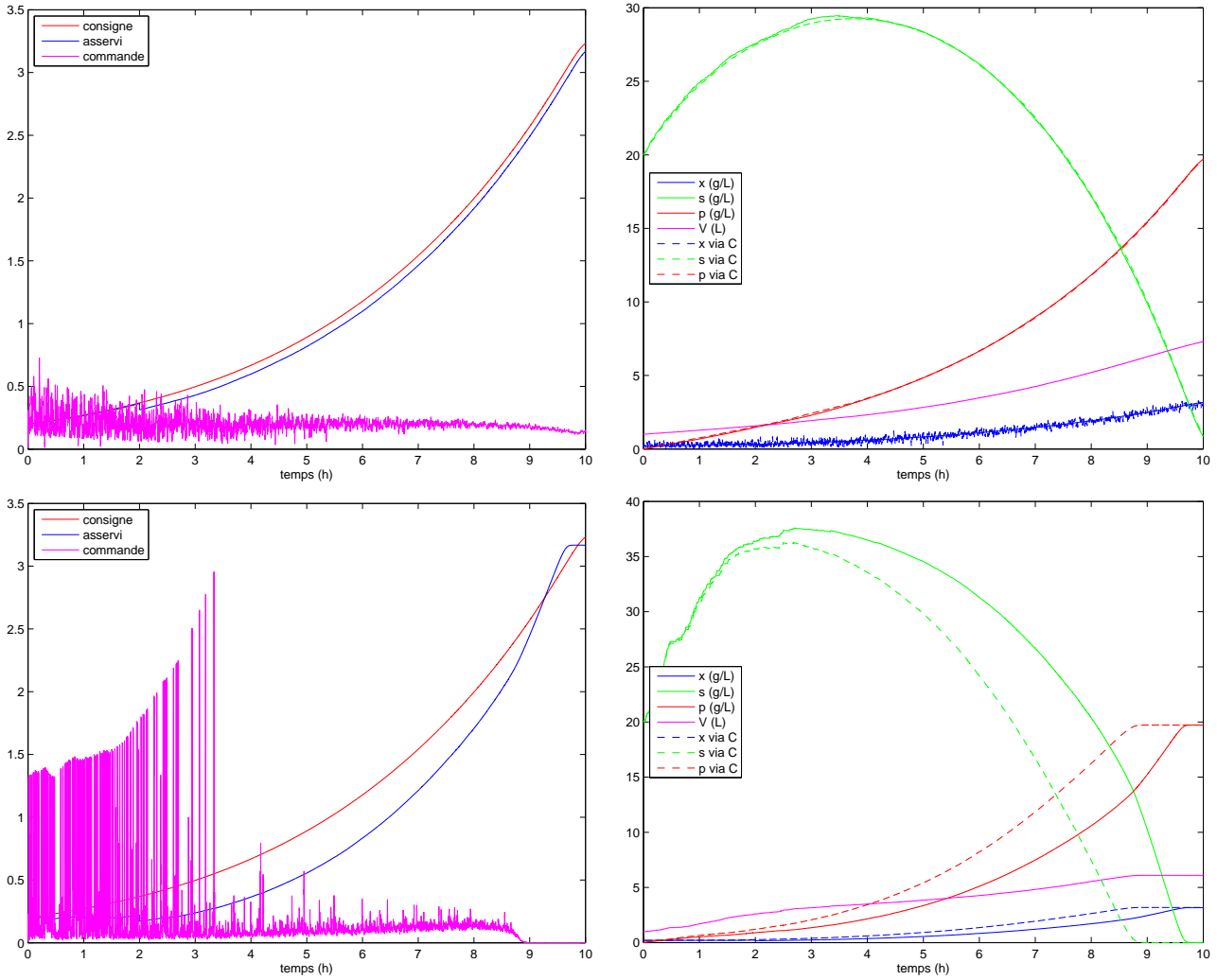


FIG. 8.18 – Suivi de trajectoire par fort niveau de bruit, avec correcteur passif par recalage de modèle mis à jour toutes les 6 minutes (haut), et avec correcteur classique, $K = 10$ (bas).

8.5 Extension du paramétrage à une classe de modèles plus large

La paramétrisation utilisée pour le modèle de bioréacteur peut s'étendre à des modèles plus généraux. On en présente dans cette section quelques exemples formels, dont le principal intérêt est illustratif.

► Soit k une fonction positive. Le modèle :

$$\begin{cases} \partial_t x = G(X) - f(x) k(u) \\ \partial_t s = -a_1 G(X) + g(s_i - s) k(u) \\ \partial_t p = a_2 G(X) - h(p) k(u) \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

peut se paramétrer en suivant la même démarche que la Section 8.2, en utilisant le changement

de temps $\mathbf{S}_{\partial_t^{-1}k(u)}$ et la sortie paramétrique :

$$y = \left(\frac{G(\tilde{X})}{k(\tilde{u})}, \boldsymbol{\delta} \cdot X \right)^T.$$

On obtient alors l'équation paramétrique (du modèle en temps τ) suivante, dont les équations dynamiques sont un système non linéaire *découplé* avec entrée linéaire :

$$\begin{cases} \partial_\tau \tilde{x} = -f(\tilde{x}) + y_1 \\ \partial_\tau \tilde{s} = -g(\tilde{s} + s_i) - a_1 y_1 \\ \partial_\tau \tilde{p} = -h(\tilde{p}) + a_2 y_1 \\ y = \left(\frac{G(\tilde{X})}{k(\tilde{u})}, \boldsymbol{\delta} \cdot X \right)^T. \end{cases}$$

L'asservissement se résume donc, ici encore, à l'asservissement d'équations non linéaires scalaires. On déduit, ici encore, x, s, p par composition par $\mathbf{S}_{\partial_t^{-1}k(u)}^{-1}$.

► Soient k_1, k_2, k_3 des fonctions positives, avec k_1 inversible, et soit le modèle :

$$\begin{cases} \partial_t x = G(X) - f(x) k_1(u) \\ \partial_t s = -a_1 G(X) + g(s_i - s) k_2(u) \\ \partial_t p = a_2 G(X) - h(p) k_3(u) \\ X(0) = X_0. \end{cases} \quad (8.13)$$

On définit l'opérateur de changement de temps multiple :

$$\mathbf{S} : X \mapsto \tilde{X} := \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1(x) \\ \mathbf{S}_2(s) \\ \mathbf{S}_3(p) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \circ (\partial_t^{-1} k_1(u))^{-1} \\ s \circ (\partial_t^{-1} k_2(u))^{-1} \\ p \circ (\partial_t^{-1} k_3(u))^{-1} \end{pmatrix}.$$

Par application de ce changement de temps au système (8.13), on obtient le système :

$$\begin{cases} \tilde{x}' = -f(\tilde{x}) + \frac{G(\mathbf{S}_1(X))}{\mathbf{S}_1(k_1(u))}, \\ \tilde{s}' = g(s_i - \tilde{s}) - a_1 \frac{G(\mathbf{S}_2(X))}{\mathbf{S}_2(k_2(u))}, \\ \tilde{p}' = -h(\tilde{p}) + a_2 \frac{G(\mathbf{S}_3(X))}{\mathbf{S}_3(k_3(u))}, \\ \tilde{X} = X_0. \end{cases} \quad (8.14)$$

On note $y_i := \frac{G(\mathbf{S}_i(X))}{\mathbf{S}_i(k_i(u))}$; alors les quantités y_i sont toutes exprimables les unes en fonction des autres. En effet, on a², par définition des y_i :

$$\mathbf{S}_1^{-1}(y_1 \mathbf{S}_1(k_1(u))) = G(X) = \mathbf{S}_1^{-1}(y_2 \mathbf{S}_2(k_2(u))) = \mathbf{S}_3^{-1}(y_3 \mathbf{S}_3(k_3(u))),$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{S}_1^{-1}(y_1) k_1(u) = G(X) = \mathbf{S}_2^{-1}(y_2) k_2(u) = \mathbf{S}_3^{-1}(y_3) k_3(u),$$

²On rappelle que les changement de temps commutent avec les opérateurs statiques et que $\mathbf{S}(fg) = \mathbf{S}(f) \mathbf{S}(g)$.

d'où la relation :

$$\begin{aligned} y_2 &= \mathbf{S}_2 \left(\frac{\mathbf{S}_1^{-1}(y_1) k_1(u)}{k_2(u)} \right) \\ y_3 &= \mathbf{S}_3 \left(\frac{\mathbf{S}_1^{-1}(y_1) k_1(u)}{k_3(u)} \right). \end{aligned}$$

On définit alors la sortie paramétrique

$$y := (y_1, \boldsymbol{\delta} \cdot X)^T,$$

et on a l'équation paramétrique de (8.14))

$$\begin{cases} \tilde{x}' = -f(\tilde{x}) + y_1, \\ \tilde{s}' = g(s_i - \tilde{s}) - a_1 \mathbf{S}_2 \left(\frac{\mathbf{S}_1^{-1}(y_1) k_1(u)}{k_2(u)} \right), \\ \tilde{p}' = -h(\tilde{p}) + a_2 \mathbf{S}_3 \left(\frac{\mathbf{S}_1^{-1}(y_1) k_1(u)}{k_3(u)} \right), \\ y = (y_1, \boldsymbol{\delta} \cdot X). \end{cases}$$

Bien que moins simple que l'équation paramétrique dans le cas du bioréacteur original, notamment du fait que le paramétrage ne peut pas s'exprimer (equation implicite car u apparaît encore dans les "équations d'état"), cette expression permet cependant d'asservir \tilde{x} (ou \tilde{s} , \tilde{p} en choisissant y_2 ou y_3) de manière *scalaire* et *découplée*, le lien avec les autres équations passant par le calcul des deux autres horloges fonctions de u , que l'on peut calculer sans difficulté via l'expression de la sortie paramétrique (dernière équation). Ceci fera l'objet de travaux futurs.

Remarque 8.11 *L'équation paramétrique du système en t se déduit, là encore, par changement de temps inverse.*

Conclusion

Ce travail constitue une tentative pour aborder les problèmes variés qui se posent en automatique d’une manière globale dans le temps, les différentes quantités intervenant dans ces problèmes devenant, de ce point de vue, des *trajectoires* considérées dans leur ensemble. De façon imagée, il s’agit d’une formulation des problèmes dans “l’espace-temps”, le terme “espace” faisant ici référence aux espaces d’état, de commande, de sortie, etc. au sens classique. L’intérêt de formulations globales des problèmes est de permettre assez naturellement l’utilisation de transformations elles aussi globales, génériquement désignées par le terme “opérateur”, et donc certaines n’ont aucun équivalent au sens classique. S’agissant de trajectoires, donc de fonctions à valeurs dans un espace en général topologique, les espaces en jeu sont d’emblée de dimension infinie. Par ailleurs, les développements analytiques ne peuvent plus en général être suffisants pour mener jusqu’au bout la résolution d’un problème donné. Il en résulte que le choix de topologies permettant, notamment, de mesurer les erreurs d’approximation devient un problème à la fois crucial et non trivial. En même temps, la richesse des topologies disponibles sur les ensembles fonctions est un atout, au sens où il devient possible d’adapter les topologies au problème considéré, de manière à obtenir la continuité des opérations mises en œuvre, préalable indispensable à la robustesse des solutions.

Dès lors, une question qui se pose naturellement est celle de la transformation d’un problème dynamique de telle manière que le problème transformé soit “plus simple” que le problème initial. Cette idée n’est pas nouvelle. Ainsi, par exemple, la classique transformation de Laplace n’a pas d’autre but. De même, dans le domaine des systèmes différentiels non linéaires, les notions de linéarisations par retour d’état et leurs dérivées ont le même objectif.

Dans cette thèse, on a posé cette problématique générale de transformation d’un problème en vue de sa simplification, au sens des opérateurs *non nécessairement locaux* agissant sur des trajectoires, et étudié un certain nombre d’entre elles présentant des propriétés remarquables. Les transformations de type changement de temps ont été définies et étudiées de manière approfondie, et un certain nombre de propriétés ont été établies, conduisant à divers résultats tels la désingularisation de modèles et le découplage de composantes état/entrée, la transformation par représentation diffusive, présentée de manière succincte mais suffisante pour aborder les problèmes considérés dans ce mémoire, permettant d’étendre aux modèles non locaux l’essentiel des propriétés établies pour les modèles locaux. Par ailleurs, les opérateurs statiques, omniprésents tant dans les modèles dynamiques que dans les transformations que l’on peut être amené à faire, ont été étudiés et leur continuité assurée sous des hypothèses de faible régularité. Abordée dans ce contexte opératoire et de transformations globales, la notion de paramétrisation de modèle a été ensuite définie de manière générale et peu restrictive, puis affaiblie avec l’introduction des notions d’équation paramétrique et de paramétrisation de sous-modèle.

Toutes ces transformations, pouvant être intimement associées lors d’applications concrètes, constituent une “boîte à outils” susceptibles d’apporter des simplifications aux problèmes dynamiques complexes, comme cela été illustré en seconde partie de la thèse. Bien sûr, on ne saurait envisager

de mettre au point une méthode pour définir de manière systématique les transformations idoines à la résolution de tout problème dynamique ; il est en revanche envisageable d'étudier des *classes génériques* de problèmes dynamiques, dans le but d'établir un ensemble de transformations plus spécifiquement appropriées. Ceci constituera une part importante des travaux qui prolongeront cette thèse.

Dans cette optique, il sera nécessaire d'une part d'approfondir les transformations introduites. On peut citer, par exemple, l'étude des changements de temps à horloge non inversible, qui ont rôle important pour la simplification et la paramétrisation de modèles à frottements secs, et des changements de temps multiples, ainsi que l'approfondissement des résultats concernant la paramétrisation opératorielle de modèles. D'autre part, il serait intéressant d'étendre le cadre de travail à d'autres transformations plus exotiques (et néanmoins utiles car intervenant dans nombre de problèmes physique) comme les opérateurs d'hystérésis, ainsi que l'étude d'autres classes de problèmes, basés par exemple sur les systèmes dynamiques hybrides, les variétés continues laissant alors place à des espaces topologiques plus généraux.

Enfin, la mise en œuvre sur des problèmes concrets des méthodes développées via ces outils est évidemment une part importante des travaux qui pourront s'articuler autour de cette thèse.

Annexe A

Notions sur les espaces de trajectoires

NB : Davantage de détails pourront être trouvés dans les ouvrages standard, notamment [26], [46].

Espaces vectoriels topologiques, variétés

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} . L'espace E est un espace de Banach s'il est muni d'une norme $\|\cdot\|_E$ et est complet pour cette norme. Si E est muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)_E$, alors E est un espace de Hilbert s'il est complet pour la norme associée.

Proposition A.1 *Dans un espace de Banach de dimension infinie, la boule unité n'est jamais compacte.*

L'espace E est un espace de Fréchet s'il est muni d'une famille dénombrable de (semi)normes $\|\cdot\|_k$ et est complet pour la métrique définie par $d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{\|x-y\|_k}{1+\|x-y\|_k}$. La convergence dans E est définie par $x_n \xrightarrow{E} x \Leftrightarrow d(x_n, x) \rightarrow 0$; au niveau pratique, cette convergence s'exprime :

$$x_n \xrightarrow{E} 0 \Leftrightarrow \forall k, \|x_n - x\|_k \rightarrow 0.$$

Dans un espace de Fréchet (et donc aussi de Banach), la (topologie de la) convergence relative à la distance est appelée (topologie de la) convergence forte. Lorsqu'on ne précise pas, c'est la topologie par défaut.

Enfin, dans les cas les plus généraux considérés dans cette thèse, E est un espace vectoriel topologique localement convexe (evtlc) satisfaisant au premier axiome de dénombrabilité¹.

Soient E, F deux espaces vectoriels topologiques localement convexes. On note :

$$\mathcal{C}(E; F) = \{f : E \rightarrow F; f \text{ continue}\}.$$

Dans le cas où E et F sont des Banach, $\mathcal{C}(E; F)$ est un espace de Fréchet pour la famille de normes :

$$\|f\|_k = \sup_{x \in B_k} \|f(x)\|_F, \text{ où } B_k \text{ est la boule de } E \text{ de centre } 0 \text{ et de rayon } k.$$

On note $\mathcal{L}(E; F) = \{f : E \rightarrow F; f \text{ linéaire continue}\}$. Dans les cas où E et F sont des Banach, $\mathcal{L}(E; F)$ est un espace de Banach pour la norme :

$$\|f\|_{\mathcal{L}(E; F)} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F.$$

¹Les espaces de Fréchet (et donc aussi de Banach) satisfont cet axiome.

Dans le cas où E et F sont des Banach, on définit :

$$\mathcal{C}^1(E; F) = \{f \in \mathcal{C}(E; F); f \text{ Fréchet-dérivable, } f' \in \mathcal{C}(E; \mathcal{L}(E; F))\};$$

c'est un espace de Fréchet pour la suite de normes :

$$\|f\|_{\mathcal{C}^1, k} = \sup_{x \in B_k} \|f(x)\|_F + \sup_{x \in B_k} \|f'(x)\|_{\mathcal{L}(E; F)}.$$

On définit de même l'espace de Fréchet $\mathcal{C}^n(E; F)$ des fonctions de E dans F n fois continûment Fréchet-dérivables. Enfin, l'espace $\mathcal{C}^\infty(E; F) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(E; F)$ est également un espace de Fréchet

pour la suite de normes $\|f\|_{\mathcal{C}^\infty, k} = \sum_{i=0}^k \|f\|_{\mathcal{C}^i, k}$.

On dit que V est une variété topologique (ou simplement variété si aucune confusion n'est à craindre) si 1) V est un espace topologique² et 2) il existe un evtlc X tel que tout point $x \in V$ admet un voisinage homéomorphe à un ouvert de X . En particulier pour E, F evtlc, le graphe d'une application f continue de $\text{dom}(f) \subset E$ dans F , muni de la topologie induite par l'evtlc $E \times F$, est une variété topologique.

Dualité et convergences faibles

Soit E un evtlc satisfaisant au premier axiome de dénombrabilité. On appelle dual (topologique) de E l'espace $\mathcal{L}(E; \mathbb{R})$ des formes linéaires continues sur E :

$$E' = \{\varphi \text{ linéaire : } E \rightarrow \mathbb{R}; x_n \xrightarrow{E} 0 \Rightarrow \varphi(x_n) \rightarrow 0\};$$

On note pour $\varphi \in E'$ et $x \in E$: $\varphi(x) = \langle \varphi, x \rangle_{E', E}$.

Lorsque E est un espace de Banach, son dual est lui-même un espace de Banach pour la norme définie par :

$$\|\varphi\|_{E'} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} |\langle \varphi, x \rangle_{E', E}|;$$

on a alors : $|\langle \varphi, x \rangle_{E', E}| \leq \|\varphi\|_{E'} \cdot \|x\|_E$.

Le bidual de E est défini par : $E'' = (E')'$. A un isomorphisme topologique près, E s'identifie à un sous-espace fermé de E'' ; lorsque $E'' = E$ on dit que E est réflexif.

Tout espace de Banach E peut être muni de la topologie de la convergence faible :

$$x_n \xrightarrow{E} 0 \Leftrightarrow \forall \varphi \in E', \langle \varphi, x_n \rangle_{E', E} \rightarrow 0;$$

pour cette topologie, E est un evtlc complet. Enfin, le dual E' d'un espace E peut également être muni, outre la topologie faible définie à partir de E'' , de la topologie $*$ -faible :

$$\varphi_n \xrightarrow{E'}^* 0 \Leftrightarrow \forall x \in E, \langle \varphi_n, x \rangle_{E', E} \rightarrow 0.$$

De manière générale, on a les propriétés :

$$\varphi_n \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi_n \rightharpoonup 0 \Rightarrow \varphi_n \xrightarrow{*} 0.$$

Proposition A.2 *dans un espace de Banach E' , la boule unité est compacte pour la topologie $*$ -faible.*

²Non nécessairement vectoriel.

Espaces de Lebesgue

Soit $I =]0, T[$. Un sous-ensemble e de I est dit *négligeable* lorsque sa mesure de Lebesgue est nulle. Une réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle.

Deux fonctions f, g mesurables $I \rightarrow \mathbb{R}$ sont dites *égales presque partout* lorsqu'il existe e de mesure nulle tel que $\forall x \in I \setminus e, f(x) = g(x)$. On note l'égalité presque partout : $f = g$ pp ou $f \stackrel{\text{pp}}{=} g$. L'égalité presque partout est une *relation d'équivalence* compatible avec la structure d'espace vectoriel.

La convergence simple presque partout est définie par :

$$f_n \stackrel{\text{pp}}{\rightarrow} f \Leftrightarrow \exists e \text{ de mesure nulle, } \forall x \in I \setminus e, f_n(x) \rightarrow f(x).$$

Les intégrales suivantes sont au sens de Lebesgue. Pour $p \in [1, +\infty[$, On définit l'espace *quotient* :

$$L^p(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable; } \int_I |f|^p dx < +\infty\} / \stackrel{\text{pp}}{=}.$$

Les éléments de $L^p(I)$ sont des classes d'équivalences de fonctions égales *deux à deux* presque partout. Muni de la norme :

$$\|f\|_{L^p(I)} = \sqrt[p]{\int_I |f|^p dx} < +\infty,$$

$L^p(I)$ est un espace de Banach, réflexif si $p > 1$, de Hilbert pour $p = 2$, le produit scalaire étant : $(f|g)_{L^2(I)} = \int_I fg dx$.

Pour $1 < p < \infty$, le dual de $L^p(I)$ s'identifie à $L^q(I)$ avec q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; on a alors : $\langle f, g \rangle_{L^{p'}, L^p} = \int_I fg dt$.

La borne supérieure essentielle d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est définie par :

$$\text{ess sup } A = \inf_{e \text{ négligeable}} \left\{ \sup_{x \in A \setminus e} x \right\};$$

Si aucune ambiguïté n'est à craindre, on désignera ess sup simplement par \sup . On définit alors l'espace :

$$L^\infty(I) = \{f; I \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable; } \text{ess sup } |f| < +\infty\} / \stackrel{\text{pp}}{=},$$

qui est de Banach pour la norme :

$$\|f\|_{L^\infty(I)} = \text{ess sup}_{x \in I} |f(x)|.$$

Proposition A.3 *Si I est de mesure finie, $L^\infty(I) \hookrightarrow L^p(I) \hookrightarrow L^1(I)$, les injections étant continues et denses.*

Le dual de $L^1(I)$ s'identifie à $L^\infty(I)$; ces espaces ne sont pas réflexifs : $L^1(I) \hookrightarrow L^\infty(I)'$. La convergence $*$ -faible de $L^\infty(I)$ s'exprime : $f_n \xrightarrow{*} 0 \Leftrightarrow \forall g \in L^1(I), \langle f, g \rangle_{L^\infty, L^1} = \int_I fg dt \rightarrow 0$.

En notant $p' = \frac{p}{p-1}$, $1' = \infty$, $\infty' = 1$, on a la propriété (inégalité de Holder) :

$$\forall p \in [1, \infty], |\langle f, g \rangle_{L^{p'}, L^p}| \leq \|f\|_{L^{p'}} \cdot \|g\|_{L^p}.$$

On définit enfin :

$$L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}) = \{f \text{ mesurables; } \forall a, b \in \mathbb{R}, f|_{]a,b[} \in L^p(a, b)\};$$

muni de la famille dénombrable de normes $\|f\|_n = \|f|_{]-n,n[}\|_{L^p(-n,n)}$, $L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R})$ est un espace de Fréchet. Son dual s'identifie à l'espace des fonctions à support compact de $L^{p'}(\mathbb{R})$. Dans le cas $p = \infty$, la convergence dans $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R})$ est la convergence uniforme (à un ensemble de mesure nulle près) sur tout compact.

Espaces de Sobolev

On note $\mathcal{D}'(I)$ l'espace des distributions de Schwartz, dual topologique de l'espace $\mathcal{D}(I)$. On a la propriété $L^p(I) \hookrightarrow \mathcal{D}'(I)$. Les fonctions de $\mathcal{D}(I)$ étant indéfiniment dérivables et à support compact, pour $f \in L^p(I)$, la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f au sens des distributions est définie par :

$$f^{(n)} \in \mathcal{D}'(I), \forall \varphi \in \mathcal{D}(I), \langle f^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle f, \varphi^{(n)} \rangle.$$

Pour $p \in [1, \infty]$, $k \in \mathbb{N}$, on définit alors les espaces de Sobolev (les dérivées étant au sens des distributions) :

$$W^{k,p}(I) = \{f \in L^p(I); f', f'', \dots, f^{(k)} \in L^p(I)\};$$

en particulier, $W^{0,p}(I) = L^p(I)$. Muni de la norme :

$$\|f\|_{W^{k,p}} = \sum_{i=0}^k \|f^{(i)}\|_{L^p},$$

$W^{k,p}(I)$ est un espace de Banach. Dans le cas $p = 2$, C'est un espace de Hilbert, noté $H^k(I)$, de produit scalaire : $(f|g)_{H^k(I)} = \sum_{i=1}^k (f^{(i)}|g^{(i)})_{L^2(I)}$.

Les injections $W^{k+1,p}(I) \hookrightarrow W^{k,p}(I)$ sont denses et continues, compactes³ lorsque I est de mesure finie. Pour $p \in [1, \infty[$, le dual de $W^{k,p}(I)$ est noté $W^{-k,p'}(I)$; il s'identifie à un sous-espace de $\mathcal{D}'(I)$.

On définit de la même manière les espaces $W_{\text{loc}}^{k,p}(\mathbb{R})$, qui sont des espaces de Fréchet pour la famille dénombrable de normes : $\|f\|_n = \sum_{i=1}^k \|f^{(i)}\|_{W^{k,p}(-n,n)}$ et dont le dual s'identifie à un sous-espace de distributions à support compact.

Proposition A.4 *La dérivation est une opération continue de $W^{k+1,p}(I)$ dans $W^{k,p}(I)$ et de $W_{\text{loc}}^{k+1,p}(I)$ dans $W_{\text{loc}}^{k,p}(I)$; en particulier :*

$$f_n \xrightarrow{W^{k+1,p}} f \Rightarrow f_n' \xrightarrow{W^{k,p}} f', \quad f_n \xrightarrow{W^{k+1,p}} f \Rightarrow f_n' \xrightarrow{W^{k,p}} f'.$$

Espaces de trajectoires

Les espaces fonctionnels de trajectoires sont naturellement adaptés à l'analyse des problèmes dynamiques. On rappelle ci-après les principaux considérés dans cette thèse.

Soit E un espace de Banach. Dans la suite, I est de mesure finie. On définit :

$$C^k(I; E) = \{f : I \rightarrow E; f \text{ est } k \text{ fois continûment dérivable}\};$$

³C'est-à-dire : $f_n \xrightarrow{W^{k+1,p}} f \Rightarrow f_n' \xrightarrow{W^{k,p}} f'$.

C'est un espace de Fréchet pour la topologie de la convergence uniforme de $f_n^{(i)}$, $i = 0 : k$, sur tout compact de I .

Avec \bar{I} la fermeture de I , $C^k(\bar{I}; E)$ est un espace de Banach pour la norme :

$$\|f\|_{C^k(\bar{I}; E)} = \sum_{i=0}^k \sup_{t \in \bar{I}} \|f^{(i)}(t)\|_E.$$

On définit enfin :

$$C^\infty(\bar{I}; E) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\bar{I}; E),$$

de Fréchet pour la suite de normes :

$$\|f\|_{C^\infty(\bar{I}; E), k} = \|f\|_{C^k(\bar{I}; E)}.$$

On a :

$$\begin{aligned} C^\infty(I; E) &\hookrightarrow C^{k+1}(I; E) \hookrightarrow C^k(I; E), \\ C^\infty(\bar{I}; E) &\hookrightarrow C^{k+1}(\bar{I}; E) \hookrightarrow C^k(\bar{I}; E), \end{aligned}$$

les injections étant compactes et denses. L'opérateur de dérivation ∂_t est continu dans $C^\infty(I; E)$, dans $C^\infty(\bar{I}; E)$, de $C^{k+1}(I; E)$ dans $C^k(I; E)$ et de $C^{k+1}(\bar{I}; E)$ dans $C^k(\bar{I}; E)$.

Remarque A.5 $C^k(I; \mathbb{R})$ sera noté simplement $C^k(I)$.

On appelle fonction simple $I \rightarrow E$ toute fonction définie sur I à valeurs dans un sous-ensemble fini de E telle que l'image réciproque de tout élément de E est un sous-ensemble mesurable de \mathbb{R} . On note $S(I; E)$ l'espace des fonctions simples $I \rightarrow E$. L'espace $M(I; E)$ des fonctions (fortement) mesurables de I dans E est défini par :

$$M(I; E) = \{v; I \rightarrow E : \exists v_n \in S(I; E), \|v_n - v\|_E \xrightarrow{\text{pp}} 0\}.$$

On définit :

$$L^p(I; E) = \{f \in M(I; E); \|\cdot\|_E \circ f \in L^p(I)\};$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^p(I; E)} = \|\|f\|_E\|_{L^p(I)} = \begin{cases} \sqrt[p]{\int_I \|f(x)\|_E^p dx} & \text{si } p \neq \infty \\ \text{ess sup}_{x \in I} \|f(x)\|_E & \text{si } p = \infty, \end{cases}$$

l'espace $L^p(I; E)$ est un espace de Banach. Pour $1 \leq p < \infty$, si E est réflexif, son dual s'identifie à $L^{p'}(I; E')$; pour $g \in L^p(I; E)$ et $f \in L^{p'}(I; E')$, on a alors :

$$\langle f, g \rangle_{L^{p'}(I; E'), L^p(I; E)} = \int_I \langle f(t), g(t) \rangle_{E', E} dt,$$

et on vérifie aisément les propriétés :

$$\begin{aligned} |\langle f, g \rangle_{L^{p'}(I; E'), L^p(I; E)}| &\leq \int_I |\langle f(t), g(t) \rangle_{E', E}| dt \leq \int_I \|f(t)\|_{E'} \cdot \|g(t)\|_E dt = \\ &= \langle \|f\|_{E'}, \|g\|_E \rangle_{L^{p'}(I), L^p(I)} \leq \|f\|_{L^{p'}(I; E')} \cdot \|g\|_{L^p(I; E)}. \end{aligned}$$

En particulier, la convergence $*$ -faible de $L^\infty(I; E)$ s'exprime :

$$g_n \xrightarrow[L^\infty(I; E)]{*} 0 \Leftrightarrow \forall f \in L^1(I; E'), \int_I \langle f(t), g_n(t) \rangle_{E', E} dt \rightarrow 0.$$

propriétés : $L^\infty(I; E) \hookrightarrow L^p(I; E) \hookrightarrow L^1(I; E)$, les injections étant continues et denses. A une isométrie près,

$$\begin{aligned} C^0(\bar{I}; E) &\hookrightarrow L^p(I; E) \text{ injection continue } \forall p \in [1, \infty], \text{ dense si } p < \infty, \\ C^0(\bar{I}; E) &\text{ sous-espace strict de } L^\infty(I; E). \end{aligned}$$

On définit de même :

$$W^{k,p}(I; E) = \{f \in L^p(I; E); f', f'', \dots, f^{(k)} \in L^p(I; E)\},$$

de Banach pour la norme :

$$\|f\|_{W^{k,p}(I; E)} = \sum_{i=0}^k \|f^{(i)}\|_{L^p(I; E)}.$$

Les injections $W^{k+1,p}(I, E) \hookrightarrow W^{k,p}(I, E)$ sont denses et continues. Pour $p \in [1, \infty[$ et E réflexif, le dual de $W^{k,p}(I, E)$ est noté $W^{-k,p'}(I, E')$; il s'identifie à un sous-espace de $\mathcal{D}'(I; E')$.

Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $C^k(\bar{I}; E)$ s'identifie⁴ à un sous-espace fermé strict de $W^{k,\infty}(I; E)$.

Diverses applications des espaces de trajectoires dans un Banach sont décrites dans [46].

⁴Rappelons que les éléments de $W^{k,p}$ sont des classes d'équivalences de fonctions égales deux à deux presque partout.

Annexe B

Schéma numérique pour $(\partial_t - a)^{-1}$

L'opérateur $(\partial_t - a)^{-1}$ est un opérateur linéaire intégral réalisé localement par le système linéaire :

$$\begin{cases} \partial_t v = av + u \\ v(0) = 0. \end{cases}$$

La résolution d'un tel système est traditionnellement effectuée à l'aide de schémas numériques d'équations différentielles générales non linéaires (Euler, Heun, Runge Kutta, etc.). La solution est "analytiquement" exprimable par la formule de Duhamel; aussi, il paraît plus judicieux d'utiliser cette information supplémentaire (propres aux systèmes linéaires) pour réaliser l'opérateur $(\partial - a)^{-1}$ plutôt que d'utiliser des méthodes numériques destinées aux équations différentielles non linéaires, nécessairement moins bien adaptées car plus générales.

On propose dans cette annexe un schéma numérique basé sur la formule de Duhamel, tirant profit du calcul analytique d'intégrales du type $\int x^n e^{ax} dx$, et *exact* pour les entrée affines par morceaux. Ce schéma présente l'intérêt d'être inconditionnellement stable, et donc en pratique toujours économique du fait qu'aucune condition de stabilité sur le pas de temps Δt n'est requise. NB : ce schéma constitue notamment l'élément de base pour les réalisations diffusives numériques.

On a :

$$v(t) = \int_0^t e^{a(t-s)} u(s) ds,$$

donc, en particulier, en considérant une subdivision de pas Δt^1 :

$$\begin{aligned} v(t_n) &= e^{at_n} \int_0^{t_n} e^{-as} u(s) ds \\ &= e^{at_n} \left(\int_0^{t_{n-1}} e^{-as} u(s) ds + \int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{-as} u(s) ds \right) \\ &= e^{a\Delta t} \cdot \underbrace{e^{at_{n-1}} \int_0^{t_{n-1}} e^{-as} u(s) ds}_{=v(t_{n-1})} + e^{at_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{-as} u(s) ds, \end{aligned}$$

soit :

$$v(t_n) = e^{a\Delta t} v(t_{n-1}) + e^{at_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{-as} u(s) ds. \quad (\text{B.1})$$

¹Le pas est défini par $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, supposé constant. Ceci se généralise trivialement à une discrétisation à pas variable.

Plusieurs possibilités sont envisageables. La première consiste à approcher l'intégrale par une formule de quadrature classique (rectangles, trapèzes, etc.); les schémas que l'on déduit de ces approximations ont la propriété de voir leur développement limité (en Δt) coïncider avec les schémas d'EDO classiques associés à ces quadratures (Euler, Heun etc.). Cependant, l'expression de l'intégrande dans (B.1) suggère une approximation plus judicieuse, basée sur une approximation polynomiale de u , permettant ainsi le calcul exact de l'intégrale.

Ainsi, si u est un polynôme de degré 1 sur $[t_{n-1}, t_n]$:

$$v(t_n) = e^{a\Delta t} v(t_{n-1}) + e^{a t_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left[\frac{u(t_n) - u(t_{n-1})}{\Delta t} s + \frac{u(t_{n-1}) t_n - u(t_n) t_{n-1}}{\Delta t} \right] e^{-as} ds.$$

on obtient, après quelques calculs ne présentant aucune difficulté, l'expression (exacte) :

$$\begin{aligned} v(t_n) &= e^{a\Delta t} v(t_{n-1}) + \frac{e^{a t_n}}{a\Delta t^2} [u(t_n) - u(t_{n-1})] [e^{-a t_{n-1}} (1 + a t_{n-1}) - e^{-a t_n} (1 + a t_n)] \\ &\quad + \frac{e^{a t_n}}{a\Delta t} [u(t_{n-1}) t_n - u(t_n) t_{n-1}] [e^{-a t_{n-1}} - e^{-a t_n}], \end{aligned}$$

et, après réorganisation :

$$v(t_n) = e^{a\Delta t} v(t_{n-1}) + \left[\frac{1}{a^2 \Delta t} (e^{a\Delta t} - 1) - \frac{1}{a} \right] u(t_n) + \left[\frac{1}{a^2 \Delta t} (1 - e^{a\Delta t}) + \frac{e^{a\Delta t}}{a} \right] u(t_{n-1}).$$

On propose donc le schéma numérique suivant pour la réalisation de $v = (\partial_t - a)^{-1}(u)$:

$$v_n = e^{a\Delta t} v_{n-1} + \left[\frac{1}{a^2 \Delta t} (e^{a\Delta t} - 1) - \frac{1}{a} \right] u_n + \left[\frac{1}{a^2 \Delta t} (1 - e^{a\Delta t}) + \frac{e^{a\Delta t}}{a} \right] u_{n-1}. \quad (\text{B.2})$$

Ce schéma numérique est, de fait, *exact* pour toute entrée u de type affine par morceaux.

Remarque B.1 Le schéma pourrait de même être construit de manière à être exact pour tout polynôme d'ordre supérieur, utilisant les valeurs u_{n-q}, \dots, u_n pour bâtir le polynôme d'interpolation. En somme, on peut voir cette méthode comme un schéma de type Adams-Bashford dont seule la partie nécessaire de l'intégrande (ici u) est approchée par un polynôme d'interpolation.

Bibliographie

- [1] J. Audounet, F. A. Devy-Vareta, , and G. Montseny. Pseudo-invariant diffusive control. In *Proceedings of the 14th Annual International Symposium of Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS 2000) (CD-Rom)*, pages 4024–4029, Perpignan, France, 2000.
- [2] J. Audounet, V. Giovangigli, and J.-M. Roquejoffre. A threshold phenomenon in the propagation of a point source initiated flame. *Physica D*, 1998.
- [3] G. Bastin and D. Dochain. *On-line Estimation and Adaptive Control of Bioreactors*, 1-82. Elsevier, New York, 1990.
- [4] P. Bidan, T. Lebey, G. Montseny, and J. Saint-Michel. Transient voltage distribution in inverter fed motor windings : Experimental study and modeling. *IEEE Trans. Power Electronics*, 16 :92–100, 2001.
- [5] P.-A. Bliman and M. Sorine. Dry friction models for automatic control. In *Proceedings of Euromech colloquium 351 : Systems with Coulomb friction*, 1996.
- [6] P. Bocher, H. De Meyer, and G. Vanden Berghe. Numerical solution of volterra equations based on mixed interpolation. *Computers & Mathematics with Applications*, 27(11) :1–11, 1994.
- [7] H. Brezis, P.G. Ciarlet, and J.L. Lions. *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Masson, paris, 1983.
- [8] H. Cartan. *Cours de calcul différentiel*. Hermann, Paris, 1967.
- [9] C. Casenave. *Représentation diffusive et inversion opératorielle pour l’analyse et la résolution de problèmes dynamiques non locaux*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2009.
- [10] C. Casenave and E. Montseny. Dissipative state formulations and numerical simulation of a porous medium for boundary absorbing control of aeroacoustic waves. In *17th IFAC World Congress*, pages 13432–13437, Seoul (Korea), July 6-11 2008.
- [11] C. Casenave and E. Montseny. Time-local dissipative formulation and stable numerical schemes for a class of integrodifferential wave equations. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 341 :1763–1783, 2008.
- [12] C. Casenave, E. Montseny, and L. Ségui. Formulation différentielle dissipative d’un modèle de paroi absorbante en aéroacoustique. *Comptes rendus de l’Académie des Sciences - Mécanique*, 336(4) :398–403, 2008.
- [13] F. Chyzak and A. Quadrat D. Robertz. Effective algorithms for parametrizing linear control systems over ore algebras. *Appl. Algebra Eng., Commun. Comput.*, 16(5) :319–376, 2005.
- [14] B. Cockburn, G. Karniadakis, and C. Shu. Discontinuous galerkin methods. theory, computation, and applications. *Lect. Notes Comput. Sci. Eng. 11, Springer*, 2000.
- [15] B. Fangtang and A. G. Kelkari. Exact linearization of nonlinear systems by time scale transformation. In *Proceedings of the American Control Conference*, Denver, Colorado, 4-6 June 2003.

- [16] Fliess, M., Lévine, J., and P. Rouchon. Flatness and defect of nonlinear systems : Introductory theory and examples. *International Journal of Control*, 61 :1327–1361, 1995.
- [17] M. Fliess, H. Sira-Ramirez, and R. Marquez. Regulation of non-minimum phase outputs : a flatness based approach. *Bull. Acad. Pol. Sci. Math.*, 1998.
- [18] K. Fujimoto and T. Sugie. Freedom in coordinates transformation for exact linearization and its application to transient behavior improvement. In *Proc. 35th IEEE CDC*, pages 84–89, 1996.
- [19] S. Gasser. *Etude des propriétés acoustiques et mécaniques d'un matériau métallique poreux modèle à base de sphères creuses de nickel*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2003.
- [20] J.-P. Groby and C. Tsogka. A time domain method for modeling wave propagation phenomena in viscoacoustic media. In *WAVES 2003*, pages 911–915, Jyväskylä, Finland, Springer, Berlin, 2003.
- [21] L.R. Hunt, R. Su, and G. Meyer. Design for multi-input nonlinear systems. *Differential geometric control theory*, 16(5), 1983.
- [22] A. Isidori. *Nonlinear control systems : an introduction*. Springer Verlag, Berlin, 1995.
- [23] A. Isidori, C. Moog, and A De Luca. A sufficient condition for full linearization via dynamic state feedback. In *Proc. 25th IEEE Conf. Decision & Control*, Greece, 1986.
- [24] B. Jakubczyk and W. Respondek. On linearisation of control systems. *Bull. Acad. Pol. Sci. Math.*, 28, 1980.
- [25] G. Joulin. Point-source initiation of lean spherical flames of light reactants : an asymptotic theory. *Comb. Sci. and Tech.*, pages 99–113, 1985.
- [26] A. Kolmogorov and S. Fomine. *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*. MIR, Moscou, 1974.
- [27] D. Lafarge. *Propagation du son dans les matériaux poreux à structure rigide saturés par un fluide viscothermique*. PhD thesis, Université du Maine, 1993.
- [28] T. A. M. Langlands and B. I. Henry. The accuracy and stability of an implicit solution method for the fractional diffusion equation. *J. Comput. Phys.*
- [29] L. Laudebat, P. Bidan, and G. Montseny. Modeling and optimal identification of pseudodifferential electrical dynamics by means of diffusive representation i. modeling. *IEEE Trans. on Circuits Syst. I Regul. Pap.*, 51 :1801–1813, 2004.
- [30] M. Lenczner and G. Montseny. Diffusive realization of operator solutions of certain operational partial differential equations. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 341 :737–740, 2005.
- [31] D. Levadoux and B. Michielsen. Analysis of a boundary integral equation for high-frequency helmholtz problems. In *Proceedings of the Fourth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation*, pages 565–567, 1998.
- [32] J. Monod. *Recherche sur la croissance des cultures bactériennes*. Hermann, Paris, 1942.
- [33] E. Montseny and A. Doncescu. Operatorial parametrizing of controlled dynamic systems. application to the fed-batch bioreactor control problem. In *17th IFAC World Congress*, pages 7486–7490, Seoul (Korea), July 6-11 2008.
- [34] E. Montseny and A. Doncescu. Reduction of complexity via operatorial parametric formulations for some nonlinear dynamic problems of biology. In *IEEE International Symposium on Bioinformatics and Life Science Modeling and Computing (BLSMC08)*, Okinawa (Japan), March 25-28 2008.

- [35] G. Montseny. *Représentation diffusive*. Hermès-science, Paris, 2005.
- [36] P. Moya, R. Ortega, M. Netto, L. Praly, and J. Picó. Application of nonlinear time-scaling for robust controller design of reaction systems. *Int J. Robust Nonlinear Control*, 12 :57–69, 2002.
- [37] M. T. Nihtila, J. Tervo, and P. Kokkonen. Parametrization for control of linear pde systems. In *First International Symposium on Control, Communications and Signal Processing*, Tunis, 2004.
- [38] C.V. Peroni, N.S. Kaisare, and J.H. Lee. Optimal control of a fed-batch bioreactor using simulation-based approximate dynamic programming. *Control Systems Technology*, 13 :786–790, 2005.
- [39] S. R. Pride, F.D. Morgan, and A.F.Gangi. Drag forces of porous-medium acoustics. *Phys. Rev. B.*, (47) :4964–4978, 1993.
- [40] K. Yamuna Rani and V.S. R. Rao. Control of fermenters - a review. *Bioprocess Engineering*, 21 :77–88, 1999.
- [41] M. Ronen, Y. Shabtai, and H. Guterman. Optimization of feeding profile for a fed-batch bioreactor by an evolutionary algorithm. *Journal of biotechnology*, 97(3) :253–263, 2002.
- [42] L. Schwartz. Théorie des noyaux. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, 1950, American Mathematical Society*, volume I :220–230, 1952.
- [43] A. Taflove and S. C. Hagness. Computational electrodynamics : The finite-difference time-domain method. *2nd ed., Artech House, Boston, MA*, 2000.
- [44] C. M. Topaz and A. L. Bertozzi. Swarming patterns in a two-dimensional kinematic model for biological groups. 65 :152–174, 2004.
- [45] M.R. Virga. Titchmarsh’s Theorem for Analytic Functions. *The American Mathematical Monthly*, 74(7) :849–851, 1967.
- [46] A. Visintin. *Differential models of hysteresis*. Springer,Berlin, 1994.
- [47] J.J. Winkin, A.K. Dramé, and D. Dochain. Dynamic analysis of a biochemical reactor with time delay. In *Proceedings of IFAC CDPS 2009*.
- [48] K. Yosida. *Functional Analysis*. Springer-Verlag, NewYork, 1980.
- [49] C. Zhang and S. Vandewalle. General linear methods for volterra integro-differential equations with memory. *SIAM journal on scientific computing*, 27(6) :2010–2031, 2006.
- [50] X. Zhihua and Z. Jie. Modeling and optimal control of fed-batch processes using control affine feedforward neural networks. In *Proceedings of American Control Conference*.

Transformations opératorielles de problèmes dynamiques et applications

Auteur : EMMANUEL MONTSENY

Directeur de thèse : ANDRÉI DONCESCU

Date et lieu de soutenance : le 10 décembre 2009, LAAS-CNRS.

Discipline : Systèmes automatiques

Laboratoire : LAAS-CNRS, 7 avenue du Colonel Roche, 31077 Toulouse cedex 4.

Résumé : L'objet de cette thèse est de formaliser et étudier la problématique de transformations opératorielles pour des problèmes dynamiques généraux (nonlinéaires et/ou nonlocaux), dans l'objectif d'apporter des simplifications ou améliorations significatives aux problèmes d'analyse, de simulation, d'identification, de commande, d'estimation, etc.

Dans une première partie, un formalisme générique des problèmes dynamiques, centré autour de la notion de formulation trajectorielle, est posé, et plusieurs transformations opératorielles (*a priori* elles aussi nonlinéaires et/ou nonlocales) sont étudiées, telles par exemple les transformations de type changement de temps ou la paramétrisation opératorielle de modèles dynamiques.

L'intérêt de ces transformations est ensuite mis en lumière sur plusieurs exemples concrets, traités par voie analytique et mis en œuvre numériquement : désingularisation d'un modèle non-local implicite de front de flamme, analyse et schémas numériques pour une classe d'équations de propagation integro-différentielles, et contrôle d'un modèle nonlinéaire de bioréacteur fed-batch.

Mots-clés : Transformations opératorielles, modèles nonlocaux, problèmes dynamiques, paramétrisation opératorielle, changement de temps, transformation diffusive, contrôle nonlinéaire, modèles singuliers.

Operatorial transformations of dynamic problems and applications

Author : EMMANUEL MONTSENY

Thesis supervisor : ANDRÉI DONCESCU

Summary : In this thesis, we formalize and study operatorial transformations of general dynamic problems (nonlinear and/or nonlocal), to simplify or improve significantly problems like analysis, simulation, identification, control, estimation, etc.

First, a generic formalism of dynamic problems, based on the notion of trajectorial formulations, is stated, and some operatorial transformations (*a priori* nonlocal and/or nonlinear) are studied, like time-scale transformations and operatorial parametrization of dynamic models.

Then, the advantages of such transformations are highlighted on many concrete examples : desingularization of a nonlocal implicit flame front model, analysis and numerical scheme for a class of integrodifferential wave equations, and control of a nonlinear model of fed-batch bioreactor.

Keywords : Operatorial transformations, nonlocal models, dynamic problems, operatorial parametrization, time-scale transformation, diffusive transformation, nonlinear control, singular models.